第 1 章

基礎数学 1

1.1　2 次関数

1.1.1　準備

1.　次を計算せよ.

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{6}$　(3) $\dfrac{7}{8}-\dfrac{4}{5}$　(4) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{8}$　(5) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{5}{12}$

(6) $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{27}{4}$　(7) $\dfrac{35}{6}\div\dfrac{15}{14}$　(8) $\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2}}$　(9) $\dfrac{1+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}$　(10) $\dfrac{1+\dfrac{1}{5}}{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}$

(11) $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$　(12) $\sqrt{32}\times\sqrt{18}$　(13) $\sqrt{50}\times\sqrt{8}$　(14) $\sqrt{12}\div\sqrt{48}$　(15) $\sqrt{72}\div\sqrt{8}$

(16) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$　(17) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$　(18) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$　(19) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$　(20) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

2.　次を簡単にせよ.

(1) $\dfrac{21x^3y^4}{6x^2y^5}$　(2) $\dfrac{(s^2t)^2}{(st^2)^3}$　(3) $\dfrac{2(fg^3)^3}{(4f^3g)^2}$　(4) $\dfrac{a+4a^2b}{2ab}$

(5) $(2x+3y)+(5x-4y)$　(6) $(7a-3b)-(-2a-3b)$　(7) $3(m+2n)-2(2m-n)$

(8) $4(u-v)+5(2v-3u)$　(9) $\dfrac{3x-4}{4}+\dfrac{2x-1}{2}$　(10) $\dfrac{5a-b}{6}+\dfrac{a+b}{3}$

(11) $\dfrac{y+5z}{8}-\dfrac{z-7y}{12}$　(12) $\dfrac{5m+7n}{18}-\dfrac{m+5n}{12}$

3.　次の整式を展開せよ.

(1) $(x-3)(x-5)$　(2) $(x-4)(x-6)$　(3) $(x+2)(x+3)$　(4) $(x+3)(x+5)$

(5) $(x-1)(x+6)$　(6) $(x-3)(x+7)$　(7) $(3x+1)(x-4)$　(8) $(2x+1)(x-2)$

(9) $(2x+3)(3x+1)$　(10) $(3x+1)(4x+1)$　(11) $(5x-2)(2x+1)$　(12) $(4x-3)(x+2)$

4.　次の整式を因数分解せよ.

(1) x^2+3x+2　(2) x^2+6x+8　(3) $x^2+11x+24$　(4) x^2-x-2

(5) $x^2+2x-15$　(6) $x^2+5x-14$　(7) $x^2+3x-18$　(8) $x^2-7x+12$

(9) $x^2-8x+15$　(10) $x^2-10x+16$　(11) x^2-9　(12) x^2-25

5.　次の 1 次関数のグラフをかけ.

(1) $y=2x$　(2) $y=-5x$　(3) $y=x+2$　(4) $y=-x+3$　(5) $y=2x+3$

(6) $y=3x-2$　(7) $y=-2x+1$　(8) $y=-3x-1$　(9) $y=5x-4$　(10) $y=-4x+2$

6.　$x=-4$, $y=3$ のとき, 次を計算せよ.

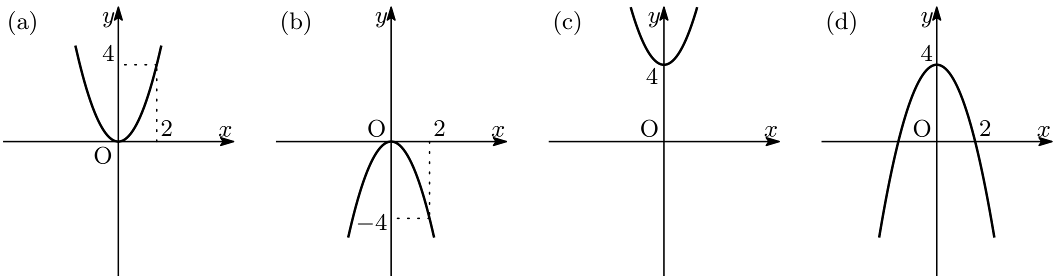
(1) $5x$　(2) $-3y$　(3) $x+y$　(4) $3x+5y$　(5) $-2x+3y$

(6) $4x-3y$　(7) x^2+y^2　(8) $2x^2+y^2$　(9) x^2-3y^2　(10) x^3+y^3

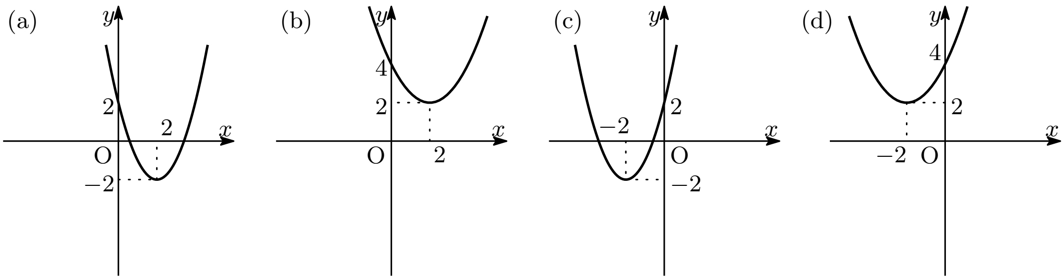
1.1.2　第 1 回

7.　次の関数のグラフとして正しいものを選べ.

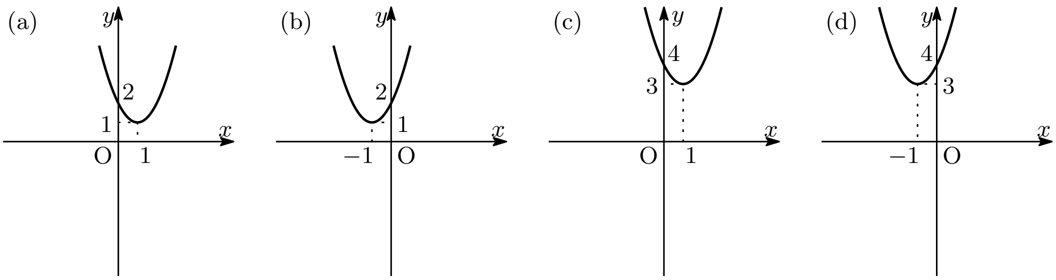
(1)　$y=-x^2+4$



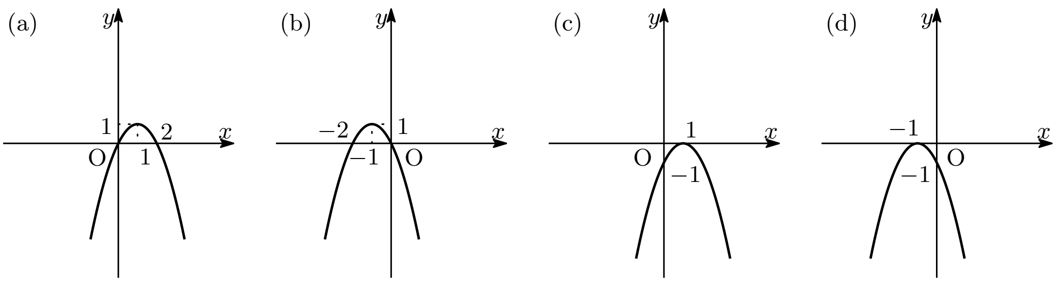
(2)　$y=x^2-4x+2$



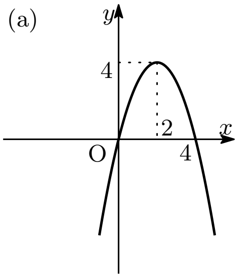
(3)　$y=x^2+2x+2$

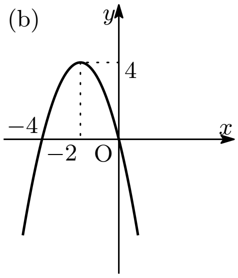


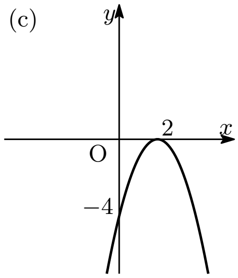
(4)　$y=-x^2-2x-1$

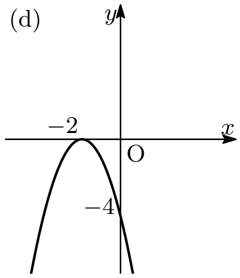


(5)　$y = -x^2 + 4x$

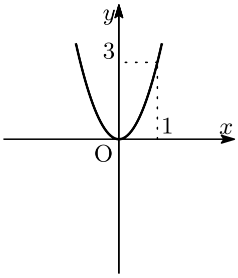
(a)


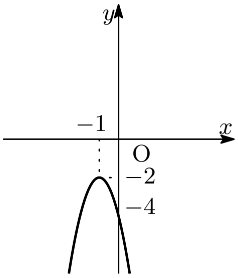
(b)


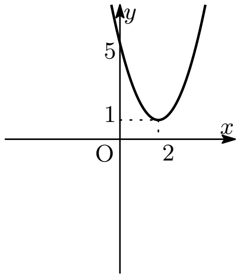
(c)


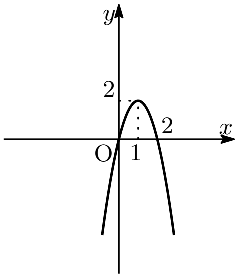
(d)


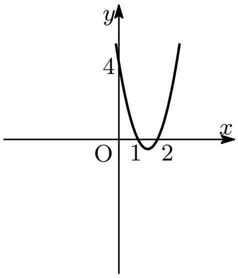
8.　下図の放物線を表す方程式を $y = ax^2 + bx + c$ の形で答えよ.

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


9.　次の 2 次関数 $f(x)$ について, (a) から (d) までの値を求めよ.

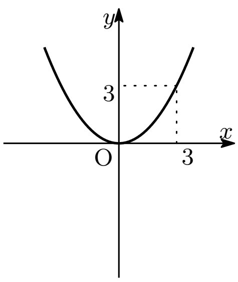
(a)　$f(x)$ の最大値と最小値

(b)　$-3 \leqq x \leqq 0$ における $f(x)$ の最大値と最小値

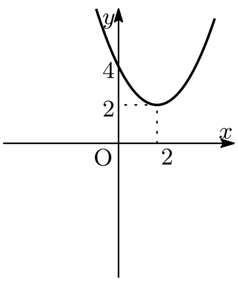
(c)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値と最小値

(d)　$3 \leqq x \leqq 6$ における $f(x)$ の最大値と最小値

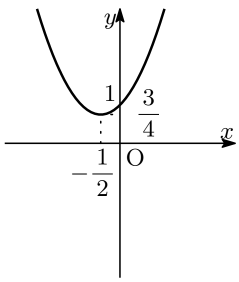
(1)　$f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$



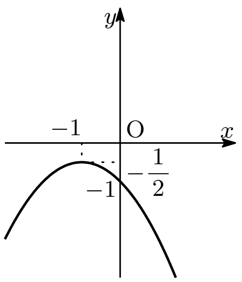
(2)　$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 4$



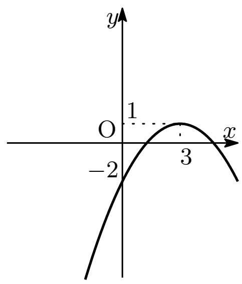
(3)　$f(x) = x^2 + x + 1$



(4)　$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x-1$



(5)　$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-2$



1.1.3　第 2 回

10.　次の 2 次方程式を解け.

(1)　$x^2+3x+2=0$　(2)　$x^2+5x+4=0$　(3)　$x^2+5x+6=0$　(4)　$x^2-7x+6=0$

(5)　$x^2-9x+18=0$　(6)　$x^2-x-6=0$　(7)　$x^2-3x-10=0$　(8)　$x^2+2x-8=0$

(9)　$x^2+x-12=0$　(10)　$x^2-16=0$

11.　次の放物線と直線との共有点の座標を求めよ.

(1)　$y=x^2$ と直線 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$　(2)　$y=x^2-2x+3$ と直線 $y=-x+3$

(3)　$y=x^2-3x$ と直線 $y=x+12$　(4)　$y=3x^2-2x+1$ と直線 $y=4x+10$

(5)　$y=2x^2-3x+1$ と直線 $y=2x-1$　(6)　$y=-x^2+1$ と直線 $y=-2x-7$

(7)　$y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=x-3$　(8)　$y=-3x^2+4x-1$ と直線 $y=x-7$

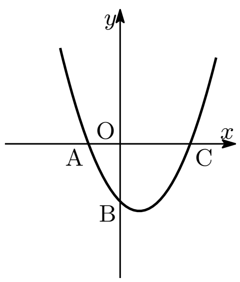
(9)　$y=-x^2+3x+2$ と直線 $y=-x+6$　(10)　$y=2x^2-7x+5$ と直線 $y=-2x+3$

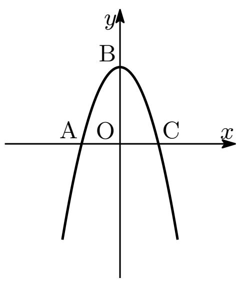
1.2　指数関数

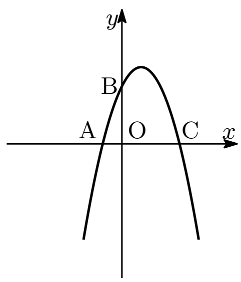
1.2.1　前回の復習

12.　次のグラフの, 点 A, 点 B, 点 C の座標を求めよ. さらに頂点の場所に◯印を付け, 座標も求めよ.

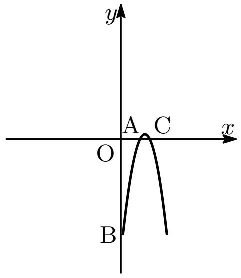
(1)　$y=x^2-x-12$　(2)　$y=-x^2+4$　(3)　$y=-x^2+2x+3$



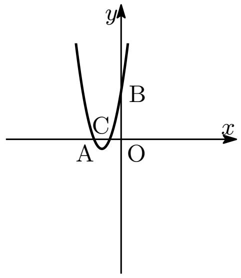




(4)　$y=-2x^2+10x-12$



(5)　$y=3x^2+9x+6$



1.2.2　第 3 回

13.　次の空欄を埋めよ.

$a>0$ とする.

$$a^1=\boxed{\text{ア}},\qquad a^0=\boxed{\text{イ}},\qquad a^{-1}=\boxed{\text{ウ}}$$

である. また, $\sqrt[p]{a^q}$ を a^r の形で表すと, $\sqrt[p]{a^q}=\boxed{\text{エ}}$ である.

$a>0,\ b>0,\ m,n$ が実数のとき, 次の指数法則が成り立つ.

$$a^m\cdot a^n=\boxed{\text{オ}}\qquad a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=\boxed{\text{カ}}$$

$$(a^m)^n=\boxed{\text{キ}}\qquad (ab)^n=\boxed{\text{ク}}$$

14.　次の値を求めよ.

(1)　3^3　(2)　4^5　(3)　6^2　(4)　2^7　(5)　5^4　(6)　$(-2)^5$　(7)　$(-3)^4$
(8)　$(-4)^4$　(9)　$(-5)^3$　(10)　$(-6)^3$　(11)　$\sqrt{16}$　(12)　$\sqrt{25}$　(13)　$\sqrt{144}$　(14)　$\sqrt{169}$
(15)　$\sqrt{196}$　(16)　$\sqrt{(-5)^2}$　(17)　$\sqrt{(-2)^4}$　(18)　$\sqrt{3^6}$　(19)　$\sqrt{4^3}$　(20)　$\sqrt{9^3}$

15.　次の値を求めよ.

(1)　$27^{\frac{2}{3}}$　(2)　$4^{\frac{1}{2}}$　(3)　$32^{\frac{2}{5}}$　(4)　$256^{\frac{1}{4}}$　(5)　$81^{\frac{3}{4}}$
(6)　$\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$　(7)　$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$　(8)　$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$　(9)　$\left(\dfrac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$　(10)　$\left(\dfrac{1}{729}\right)^{\frac{5}{6}}$
(11)　3^{-2}　(12)　2^{-3}　(13)　6^{-4}　(14)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$　(15)　$\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-3}$
(16)　$125^{-\frac{1}{3}}$　(17)　$64^{-\frac{1}{2}}$　(18)　$36^{-\frac{3}{2}}$　(19)　$27^{-\frac{2}{3}}$　(20)　$225^{-\frac{1}{2}}$

16.　次の数式を簡単にせよ.

(1)　$a^4\times a^7$　(2)　$a^3\times a^{-2}$　(3)　$a^6\times a^{-3}\times a^2$　(4)　$a^4\times a^{-3}\times a^{-2}$
(5)　$a^{-2}\times a^5\times a^{-3}$　(6)　$a^7\div a^2$　(7)　$a^3\div a^{-4}$　(8)　$a^3b\times a^{-2}b^3$
(9)　$a^2b\times a^3b^{-4}$　(10)　$a^3b^{-1}\times a^2b^{-4}$　(11)　$a^2b\div ab^2$　(12)　$a^3b^2\div a^{-1}b$
(13)　$a^4b^{-3}\div a^2b^{-2}$　(14)　$(ab^2)^2\times(a^{-1}b)^3$　(15)　$(ab^{-1})^3\times(a^{-1}b^{-2})^2$
(16)　$(a^3b^2)^2\div(ab)^3$　(17)　$(a^4b^{-2})^2\div(a^{-1}b^{-2})^4$　(18)　$(ab)^2\times(a^{-1}b^2)^3\div(a^2b^{-1})^2$
(19)　$(a^{-2}b^{-3})^3\times(a^2b^{-3})^2\div(a^{-1}b^{-3})^4$　(20)　$a^3b^2\div(a^{-1}b^{-3})^2\div(a^{-3}b^4)^3$

17.　次を計算せよ.

(1)　$9^{\frac{1}{6}}\times 9^{\frac{1}{3}}$　(2)　$8^{\frac{3}{2}}\div 8^{\frac{1}{6}}$　(3)　$32^{\frac{1}{2}}\times 32^{\frac{3}{10}}$　(4)　$4^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{5}}\div 4^{\frac{1}{10}}$
(5)　$25^{\frac{1}{6}}\div 25^{\frac{3}{10}}\div 25^{\frac{11}{30}}$　(6)　$\sqrt{a^3}\times\sqrt[6]{a}$　(7)　$\sqrt[3]{a}\div\sqrt[5]{a^2}$
(8)　$(\sqrt[6]{a})^5\times\sqrt[3]{a}$　(9)　$(\sqrt{a})^3\div(\sqrt[3]{a})^2$　(10)　$\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[3]{a^3}\div\sqrt{a}$

1.2.3　第 4 回

18.　次の指数関数のグラフの特徴について, 以下の空欄を埋めよ.

(1)　$y=2^x$ のグラフは, 点 $\left(\boxed{\text{ア}},1\right)$, $\left(\boxed{\text{イ}},2\right)$ を通り, $\boxed{\text{ウ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{エ}}$ のグラフである.

(2)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは, 点 $\left(\boxed{\text{オ}},1\right)$, $\left(\boxed{\text{カ}},\dfrac{1}{2}\right)$ を通り, $\boxed{\text{キ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{ク}}$ のグラフである.

(3)　$y=3^x$ のグラフは, 点 $\left(\boxed{\text{ケ}},1\right)$, $\left(\boxed{\text{コ}},3\right)$ を通り, $\boxed{\text{サ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{シ}}$ のグラフである.

(4)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフは, 点 $\left(\boxed{\text{ス}},1\right)$, $\left(\boxed{\text{セ}},\dfrac{1}{3}\right)$ を通り, $\boxed{\text{ソ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{タ}}$ のグラフである.

(5)　$y=5^x$ のグラフは, 点 $\left(\boxed{\text{チ}},1\right)$, $\left(\boxed{\text{ツ}},5\right)$ を通り, $\boxed{\text{テ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{ト}}$ のグラフである.

(6)　$a>0, a\neq 1$ とする. $y=a^x$ のグラフは, 点 $\left(\boxed{\text{ナ}},1\right)$, $\left(\boxed{\text{ニ}},a\right)$ を通り, $\boxed{\text{ヌ}}$ 軸を漸近線とするグラフである. また, $a>\boxed{\text{ネ}}$ のとき, グラフは右上がりであり, $\boxed{\text{ノ}}<a<\boxed{\text{ハ}}$ のとき, グラフは右下がりである.

19.　次の方程式を解け.

(1)　$2^{x-3}=8$　　(2)　$3^{2x+1}=27$　　(3)　$3^{2x}=\dfrac{1}{27}$　　(4)　$27^{x+4}=9$

(5)　$25^{3x+2}=\dfrac{1}{125}$　　(6)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{27}$　　(7)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-3}=\dfrac{1}{64}$　　(8)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+4}=32$

(9)　$\left(\dfrac{1}{81}\right)^{x-2}=27$　　(10)　$\left(\dfrac{1}{36}\right)^{3x-1}=216$

1.3　対数関数

1.3.1　前回の復習

20.　次の指数関数のグラフをかけ.

(1)　$y=2^x$　　(2)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　(3)　$y=3^x$　　(4)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　(5)　$y=5^x$

1.3.2　第 5 回

21.　次の空欄を埋めよ.

$a>0\ a\neq 1$ とする.

$$\log_a a=\boxed{\text{ア}},\qquad \log_a 1=\boxed{\text{イ}},\qquad \log_a a^n=\boxed{\text{ウ}}$$

である. $b>0, b\neq 1, M, N$ が正の実数のとき, 次が成り立つ.

$$\log_a M+\log_a N=\log_a\boxed{\text{エ}}\qquad\qquad \log_a M-\log_a N=\log_a\boxed{\text{オ}}$$

$$r\log_a M=\log_a\boxed{\text{カ}}\qquad\qquad \log_a M=\frac{\log_b\boxed{\text{キ}}}{\log_b\boxed{\text{ク}}}$$

22.　次の値を求めよ.

(1) $\log_5 1$　(2) $\log_7 7$　(3) $\log_2 8$　(4) $\log_4 64$　(5) $\log_3 81$

(6) $\log_3 \dfrac{1}{9}$　(7) $\log_2 \dfrac{1}{32}$　(8) $\log_5 \dfrac{1}{5}$　(9) $\log_7 \sqrt{7}$　(10) $\log_{10} \sqrt[3]{10}$

23. 次の値を求めよ.

(1) $\log_6 4 + \log_6 9$　(2) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$　(3) $\log_{12} 3 + 2\log_{12} 2$　(4) $2\log_{10} 5 + \log_{10} 4$

(5) $\log_8 24 - \log_8 3$　(6) $\log_6 2 - \log_6 12$　(7) $2\log_{18} 2 - \log_{18} 72$　(8) $\log_{14} 9 - 2\log_{14} 42$

(9) $4\log_2 3 - 2\log_2 6 - \log_2 18$　(10) $\log_2 28 - \log_2 35 + \log_2 20$

24. 次の値を求めよ.

(1) $\log_4 8$　(2) $\log_9 27$　(3) $\log_8 \dfrac{1}{16}$　(4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$　(5) $\log_{\frac{1}{4}} 8$

(6) $\log_{27} 9$　(7) $\log_{216} 6$　(8) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2}$　(9) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27$

(10) $(\log_2 3)\cdot(\log_3 8)$　(11) $(\log_5 7)\cdot(\log_7 5)$　(12) $(\log_{\frac{1}{2}} 3)\cdot(\log_{\sqrt{3}} 4)$

(13) $(\log_2 3)\cdot(\log_3 5)\cdot(\log_5 4)$　(14) $(\log_4 9)\cdot(\log_3 \sqrt{5})\cdot(\log_{25} 8)$

1.3.3　第 6 回

25. 次の対数関数のグラフの特徴について, 以下の空欄を埋めよ.

(1) $y = \log_2 x$ のグラフは, 点 $\left(2, \boxed{\text{ア}}\right)$, $\left(\boxed{\text{イ}}, 0\right)$ を通り, $\boxed{\text{ウ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{エ}}$ のグラフである.

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは, 点 $\left(\dfrac{1}{2}, \boxed{\text{オ}}\right)$, $\left(\boxed{\text{カ}}, 0\right)$ を通り, $\boxed{\text{キ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{ク}}$ のグラフである.

(3) $y = \log_3 x$ のグラフは, 点 $\left(3, \boxed{\text{ケ}}\right)$, $\left(\boxed{\text{コ}}, 0\right)$ を通り, $\boxed{\text{サ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{シ}}$ のグラフである.

(4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフは, 点 $\left(\dfrac{1}{3}, \boxed{\text{ス}}\right)$, $\left(\boxed{\text{セ}}, 0\right)$ を通り, $\boxed{\text{ソ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{タ}}$ のグラフである.

(5) $y = -\log_5 x$ のグラフは, 点 $\left(5, \boxed{\text{チ}}\right)$, $\left(\boxed{\text{ツ}}, 0\right)$ を通り, $\boxed{\text{テ}}$ 軸を漸近線とする右 $\boxed{\text{ト}}$ のグラフである.

(6) $a > 0, a \neq 1$ とする. $y = \log_a x$ のグラフは, 点 $\left(a, \boxed{\text{ナ}}\right)$, $\left(\boxed{\text{ニ}}, 0\right)$ を通り, $\boxed{\text{ヌ}}$ 軸を漸近線とするグラフである. また, $a > \boxed{\text{ネ}}$ のとき, グラフは右上がりであり, $\boxed{\text{ノ}} < a < \boxed{\text{ハ}}$ のとき, グラフは右下がりである.

26. 次の方程式を解け.

(1) $\log_5(4x+1) = 2$　(2) $\log_3(5x-3) = 3$　(3) $\log_2(7x+4) = 5$

(4) $\log_8(4-3x) = 2$　(5) $\log_4(17x-4) = 3$　(6) $\log_{10}(x+2) + \log_{10}(x+5) = 1$

(7) $\log_6(3x-2) + \log_6(5x-1) = 2$　(8) $\log_{15}(2x+1) + \log_{15}(x+4) = 1$

(9) $\log_{12}(4x+1) + \log_{12}(7x+2) = 2$　(10) $\log_{18}(30-6x) + \log_{18}(x+10) = 2$

1.4　三角関数 (1)

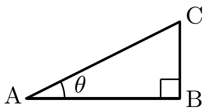
1.4.1　前回の復習

27. 次の対数関数のグラフをかけ.

(1) $y = \log_2 x$　(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$　(3) $y = \log_3 x$　(4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$　(5) $y = -\log_5 x$

1.4.2　第 7 回

28.　次の空欄を埋めよ．



図の直角三角形において，

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \cos\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \tan\theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である．また，三角関数について，次の相互関係が成り立つ．

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \boxed{\text{キ}},\qquad \boxed{\text{ク}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

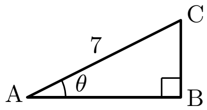
この 2 式より，

$$\boxed{\text{ケ}} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

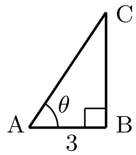
が成り立つ．

29.　次の図の直角三角形において，長さが与えられた辺以外の 2 辺の長さを θ の三角比を用いて表せ．

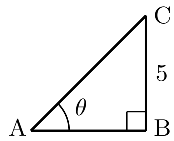
(1)



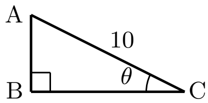
(2)



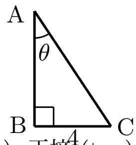
(3)



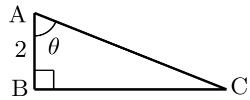
(4)



(5)



(6)



30.　次の角度の 正弦 (sin)，余弦 (cos)，正接 (tan) の値をそれぞれ求めよ．

(1)　30°　　(2)　45°　　(3)　60°

31.　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．$\sin\theta$ が次の値のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta = \dfrac{2}{5}$　　(2)　$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$　　(3)　$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$　　(4)　$\sin\theta = \dfrac{1}{6}$　　(5)　$\sin\theta = \dfrac{3}{4}$

32.　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．$\cos\theta$ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{4}$　　(3)　$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$　　(4)　$\cos\theta = \dfrac{2}{7}$　　(5)　$\cos\theta = \dfrac{7}{8}$

33.　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．$\tan\theta$ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\tan\theta = \dfrac{1}{3}$　　(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \dfrac{3}{2}$　　(4)　$\tan\theta = 2$　　(5)　$\tan\theta = 5$

34.　$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする．$\sin\theta$ が次の値のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(3)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(4)　$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$　　(5)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

1.4.3　第 8 回

35.　次の空欄を埋めよ．

三角形 ABC を考える．a, b, c を辺 BC, CA, AB のそれぞれの長さとすると，正弦定理より，

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\sin A} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\sin B} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ．ここで, R は三角形 ABC の外接円の半径である．また, 余弦定理より,

$$a^2 = b^2 + c^2 - \boxed{\text{エ}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - \boxed{\text{オ}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ．最後に, 三角形 ABC の面積を S とおけば,

$$S = \frac{1}{2}bc\boxed{\text{キ}} = \frac{1}{2}ca\boxed{\text{ク}} = \frac{1}{2}ab\boxed{\text{ケ}}$$

が成り立つ．

1.5　三角関数 (2)

1.5.1　前回の復習

36.　三角形 ABC について, 次の各問に答えよ．

(1)　$a = 2$, $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ のとき, b と外接円の半径を求めよ．
(2)　$a = \sqrt{3}$, $A = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ のとき, c と外接円の半径を求めよ．
(3)　$b = 4$, $B = 30^\circ$, $A = 60^\circ$ のとき, a と外接円の半径を求めよ．
(4)　$b = 3$, $B = 30^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき, c と外接円の半径を求めよ．
(5)　$c = \sqrt{2}$, $C = 45^\circ$, $A = 120^\circ$ のとき, a と外接円の半径を求めよ．
(6)　$c = \sqrt{6}$, $C = 30^\circ$, $B = 135^\circ$ のとき, b と外接円の半径を求めよ．

37.　三角形 ABC について, 次の各問に答えよ．

(1)　$a = \sqrt{19}$, $b = 3$, $c = 5$ のとき, 角 A を求めよ．
(2)　$b = 13$, $a = 7$, $c = 8$ のとき, 角 B を求めよ．
(3)　$c = 17$, $a = 8$, $b = 15$ のとき, 角 C を求めよ．
(4)　$c = \sqrt{2}$, $a = 2$, $b = \sqrt{3} - 1$ のとき, 角 C を求めよ．
(5)　$a = 2\sqrt{3}$, $b = 3 + \sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$ のとき, 角 A を求めよ．
(6)　$b = \sqrt{6}$, $a = 1 + \sqrt{3}$, $c = 2$ のとき, 角 B を求めよ．

38.　三角形 ABC について, 次の各問に答えよ．

(1)　$A = 45^\circ$, $b = 3$, $c = 7$ のとき, 面積 S を求めよ．
(2)　$B = 30^\circ$, $c = 4$, $a = 5$ のとき, 面積 S を求めよ．
(3)　$C = 60^\circ$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$ のとき, 面積 S を求めよ．
(4)　$A = 120^\circ$, $b = \sqrt{6}$, $c = 5$ のとき, 面積 S を求めよ．
(5)　$B = 135^\circ$, $c = \sqrt{6}$, $a = \sqrt{3}$ のとき, 面積 S を求めよ．

1.5.2　第 9 回

39.　次の座標平面上の点は第何象限の点か答えよ．

(1)　$(-1, 2)$　(2)　$(2, 3)$　(3)　$(-3, -1)$　(4)　$(5, 3)$　(5)　$(-4, 2)$
(6)　$(4, -1)$　(7)　$(3, -2)$　(8)　$(-1, -3)$　(9)　$(3, -3)$　(10)　$(-2, -2)$

40.　O を原点とする．点 P を以下の点とするとき, 動径 OP の表す一般角は第何象限の角か答えよ．

(1)　$(1, -\sqrt{3})$　(2)　$(\sqrt{2}, \sqrt{6})$　(3)　$(-3, -3)$　(4)　$(-2, 2\sqrt{3})$　(5)　$(-\sqrt{3}, -3)$
(6)　$(2, 2)$　(7)　$(\sqrt{6}, -\sqrt{2})$　(8)　$(1, -1)$　(9)　$(-3, 1)$　(10)　$(-4, -2)$

41.　次の角のうち, その動径が各問の最初の角との動径と一致するものを (a)〜(d) から全て選べ．

(1)　30°　(a)　120°　(b)　390°　(c)　750°　(d)　-330°
(2)　120°　(a)　30°　(b)　450°　(c)　840°　(d)　-240°

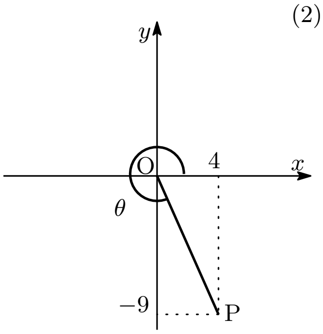
(3)　150°　(a)　510°　(b)　960°　(c)　$-30°$　(d)　$-570°$

(4)　$-30°$　(a)　150°　(b)　330°　(c)　510°　(d)　1050°

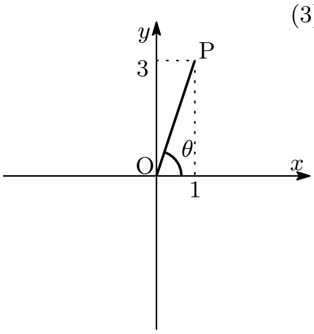
(5)　$-90°$　(a)　270°　(b)　990°　(c)　$-450°$　(d)　$-2250°$

42.　下の図の角 θ に対して, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を求めよ.

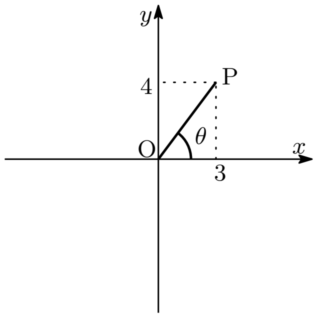
(1)



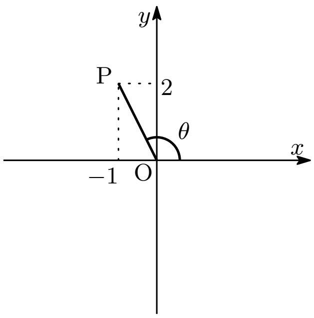
(2)



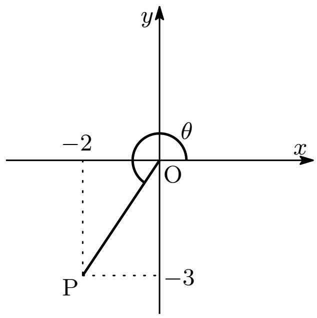
(3)



(4)



(5)



43.　次の角の大きさを弧度法で表せ.

(1)　30°　(2)　135°　(3)　240°　(4)　270°　(5)　330°

(6)　400°　(7)　540°　(8)　$-60°$　(9)　$-120°$　(10)　$-300°$

1.5.3　第 10 回

44.　次の角 θ に対する $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ.

(1)　$\theta = \dfrac{5}{3}\pi$　(2)　$\theta = \dfrac{7}{4}\pi$　(3)　$\theta = \dfrac{11}{6}\pi$　(4)　$\theta = \dfrac{11}{4}\pi$　(5)　$\theta = \dfrac{25}{6}\pi$

(6)　$\theta = \dfrac{14}{3}\pi$　(7)　$\theta = -\dfrac{1}{4}\pi$　(8)　$\theta = -\dfrac{2}{3}\pi$　(9)　$\theta = -\dfrac{7}{6}\pi$　(10)　$\theta = -\dfrac{5}{4}\pi$

45.　θ が第 3 象限の角で, $\sin\theta$ が次の値のとき, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を求めよ.

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　(2)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$　(3)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{5}$

46.　θ が第 4 象限の角で, $\cos\theta$ が次の値のとき, $\sin\theta$, $\tan\theta$ を求めよ.

(1)　$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$　(2)　$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$　(3)　$\cos\theta = \dfrac{1}{7}$

1.6　三角関数 (3)

1.6.1　前回の復習

47.　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする. $\sin\theta$ が次の値のとき, $\cos\theta$ と $\tan\theta$ をすべて求めよ.

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{4}$　(2)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{6}$　(3)　$\sin\theta = \dfrac{2}{7}$

48.　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．$\cos\theta$ が次の値のとき, $\sin\theta$ と $\tan\theta$ をすべて求めよ．

(1)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$　　(3)　$\cos\theta = \dfrac{2}{5}$

49.　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．$\tan\theta$ が次の値のとき, $\sin\theta$ と $\cos\theta$ をすべて求めよ．

(1)　$\tan\theta = -5$　　(2)　$\tan\theta = -3$　　(3)　$\tan\theta = 2$　　(4)　$\tan\theta = \dfrac{3}{2}$

50.　次の問に答えよ．

(1)　$\sin(\theta + 2\pi)$ と等しいものを次から選べ．

（ア）$-\sin\theta$　（イ）$\cos\theta$　（ウ）$\sin\theta$　（エ）π

(2)　$\sin(\theta + \pi)$ と等しいものを次から選べ．

（ア）$-\sin\theta$　（イ）$\cos\theta$　（ウ）$\sin\theta$　（エ）π

(3)　$\sin(\theta - \pi)$ と等しいものを次から選べ．

（ア）$-\sin\theta$　（イ）$\cos\theta$　（ウ）$\sin\theta$　（エ）π

(4)　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ と等しいものを次から選べ．

（ア）$\sin\theta$　（イ）$\cos\theta$　（ウ）$-\sin\theta$　（エ）0

(5)　$\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$ と等しいものを次から選べ．

（ア）$\sin\theta$　（イ）$\cos\theta$　（ウ）$-\sin\theta$　（エ）0

(6)　$\sin(-\theta)$ と等しいものを次から選べ．

（ア）$\sin\theta$　（イ）$\cos\theta$　（ウ）$-\sin\theta$　（エ）0

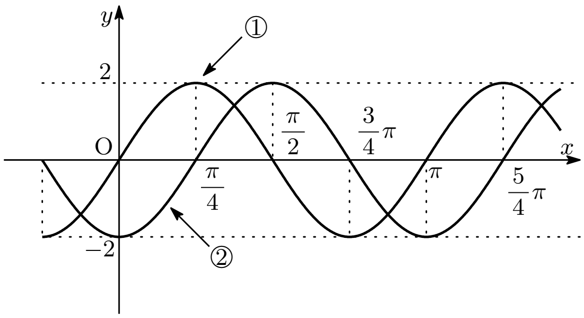
1.6.2　第 11 回

51.　次の関数の振幅と周期を答えよ．

(1)　$y = \sin 2x$　　(2)　$y = \cos 2x$　　(3)　$y = 3\sin x$

(4)　$y = 2\cos 3x$　　(5)　$y = 4\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

52.　次のグラフを見て, 空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ク}}$ に数字を埋めよ．また, $\boxed{\text{A}}$ から $\boxed{\text{C}}$ は選択肢欄から当てはまるものをそれぞれ選べ．



① は, $y = \boxed{\text{ア}}\sin\boxed{\text{イ}}\,x$ のグラフである．この関数の周期は, $\boxed{\text{A}}$ であり, 振幅は, $\boxed{\text{ウ}}$ である．② は, $y = \boxed{\text{エ}}\sin\left(\boxed{\text{オ}}\,x - \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$ のグラフである．この関数の周期は, $\boxed{\text{B}}$ であり, 振幅は, $\boxed{\text{ク}}$ である．また, ② は, ① を x 軸方向に $\boxed{\text{C}}$ だけ平行移動すると得られる．

A, B, C の選択肢欄

a. $\frac{\pi}{2}$ b. $\frac{\pi}{4}$ c. $-\frac{\pi}{2}$ d. $-\frac{\pi}{4}$ e. π f. 2π g. 4π h. $-\pi$ i. -2π j. -4π

53. 次の各問に答えよ.

(1) $y = \tan x$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア) $\tan(-x) = \tan x$ が成り立つ.
(イ) $y = \tan x$ の周期は 2π である.
(ウ) $y = \tan x$ のグラフは, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ) $y = \tan x$ のグラフは原点に関して対称である.

(2) $y = \tan 2x$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア) $\tan(-2x) = \tan 2x$ が成り立つ.
(イ) $y = \tan 2x$ の周期は 2π である.
(ウ) $y = \tan 2x$ のグラフは, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ) $y = \tan 2x$ のグラフは原点に関して対称である.

(3) $y = \tan(-x)$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア) $\tan(-(-x)) = \tan(-x)$ が成り立つ.
(イ) $y = \tan(-x)$ の周期は 2π である.
(ウ) $y = \tan(-x)$ のグラフは, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ) $y = \tan(-x)$ のグラフは原点に関して対称である.

(4) $y = \tan\frac{x}{2}$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア) $\tan\left(-\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ が成り立つ.
(イ) $y = \tan\frac{x}{2}$ の周期は 2π である.
(ウ) $y = \tan\frac{x}{2}$ のグラフは, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ) $y = \tan\frac{x}{2}$ のグラフは原点に関して対称である.

(5) $y = 3\tan x$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア) $3\tan(-x) = 3\tan x$ が成り立つ.
(イ) $y = 3\tan x$ の周期は 2π である.
(ウ) $y = 3\tan x$ のグラフは, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ) $y = 3\tan x$ のグラフは原点に関して対称である.

(6) $y = 5\tan 3x$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア) $5\tan(3(-x)) = 5\tan 3x$ が成り立つ.
(イ) $y = 5\tan 3x$ の周期は 2π である.
(ウ) $y = 5\tan 3x$ のグラフは, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ) $y = 5\tan 3x$ のグラフは原点に関して対称である.

(7)　$y = -\tan(4x)$ の性質として, 正しいものをすべて選べ.

(ア)　$-\tan(4(-x)) = -\tan(4x)$ が成り立つ.
(イ)　$y = -\tan(4x)$ の周期は 2π である.
(ウ)　$y = -\tan(4x)$ のグラフは, $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 定義されない.
(エ)　$y = -\tan(4x)$ のグラフは原点に関して対称である.

1.6.3　第 12 回

54.　正弦 (sin), 余弦 (cos) の加法定理をかけ.

55.　加法定理を用いて, 次の値を求めよ.

(1)　$\sin 15^\circ$　　(2)　$\sin 75^\circ$　　(3)　$\sin 105^\circ$
(4)　$\cos 15^\circ$　　(5)　$\cos 75^\circ$　　(6)　$\cos 105^\circ$

1.7　ベクトル

1.7.1　前回の復習

56.　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする. θ が以下の条件を満たすとき, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ の値を求めよ.

(1)　$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$　　(2)　$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$　　(3)　$\sin\theta = \dfrac{1}{5}$　　(4)　$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$　(5)　$\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$

57.　次の方程式を満たす x を求めよ. ただし, $0 \leqq x < 2\pi$ とする.

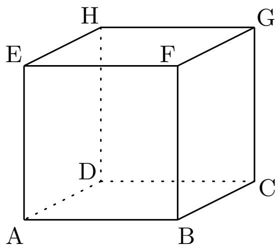
(1)　$\sin x = \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(3)　$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(4)　$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(5)　$\cos x = -\dfrac{1}{2}$　　(6)　$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(7)　$\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(8)　$\tan x = 1$

58.　次の不等式を満たす x を求めよ. ただし, $0 \leqq x < 2\pi$ とする.

(1)　$\sin x \geqq \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\sin x \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(3)　$\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(4)　$\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(5)　$\cos x \leqq -\dfrac{1}{2}$　　(6)　$\cos x \geqq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(7)　$\tan x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(8)　$\tan x > 1$

1.7.2　第 13 回

59.　右図の直方体 ABCD-EFGH において,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{c}$ とする.
それぞれの ベクトルを図示せよ.



(1)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$　　(2)　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$　　(3)　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$　　(4)　$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$　　(5)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$
(6)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$　　(7)　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$　　(8)　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$　　(9)　$-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

60.　基本ベクトル $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ に対して, 次のベクトルの基本ベクトル表示を求めよ.

(1)　$\boldsymbol{a} = (3, 4, 5)$　　(2)　$\boldsymbol{a} = (2, 3, -4)$　　(3)　$\boldsymbol{a} = (0, -4, 2)$　　(4)　$\boldsymbol{a} = (2, 0, -3)$
(5)　$\boldsymbol{a} = (-3, 2, 0)$　　(6)　$\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{1}{2}, -2, -3\right)$　(7)　$\boldsymbol{a} = \left(-3, \dfrac{1}{3}, 4\right)$　　(8)　$\boldsymbol{a} = \left(-2, 0, \dfrac{1}{5}\right)$

(9)　$\boldsymbol{a} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$　　(10)　$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

61.　ベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -4, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -3, 2)$ について, 次のベクトルの成分表示を求めよ.

(1)　$3\boldsymbol{a}$　　(2)　$-5\boldsymbol{b}$　　(3)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$　　(4)　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$　　(5)　$\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$

(6)　$2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$　　(7)　$3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$　　(8)　$3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}$　　(9)　$-\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$　　(10)　$-4\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$

62.　次のベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を求めよ.

(1)　$\boldsymbol{a} = (1, -2, 0)$　　(2)　$\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$　　(3)　$\boldsymbol{a} = (2, 2, 3)$

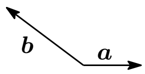
(4)　$\boldsymbol{a} = (-1, -2, 2)$　　(5)　$\boldsymbol{a} = (3, 0, -2)$　　(6)　$\boldsymbol{a} = (4, -8, -1)$

(7)　$\boldsymbol{a} = (0, -5, 4)$　　(8)　$\boldsymbol{a} = (-2, -3, 4)$　　(9)　$\boldsymbol{a} = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$

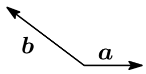
(10)　$\boldsymbol{a} = (4, 2, -\sqrt{5})$

63.　与えられたベクトルを下の図に記入せよ.

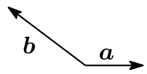
(1)　$2\boldsymbol{a}$



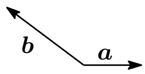
(2)　$-\boldsymbol{b}$



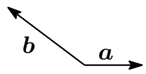
(3)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$



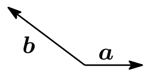
(4)　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$



(5)　$2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$



(6)　$\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$



1.7.3　第 14 回

64.　次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ となす角 θ を求めよ.

(1)　$\boldsymbol{a} = (3, -3, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 1, -1)$　　(2)　$\boldsymbol{a} = (1, 0, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 3)$

(3)　$\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, 2)$　　(4)　$\boldsymbol{a} = (2, 2, -4)$, $\boldsymbol{b} = (-3, -3, 6)$

(5)　$\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, -1, 2)$　　(6)　$\boldsymbol{a} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 2)$

(7)　$\boldsymbol{a} = (-1, 2, -2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 4, -5)$　　(8)　$\boldsymbol{a} = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 5, 4)$

(9)　$\boldsymbol{a} = (4, 3, -5)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, -1)$　　(10)　$\boldsymbol{a} = (2, 5, 7)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 4, -2)$

65.　次の各問に答えよ.

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行であるための条件として正しいものをすべて選べ.

(ア)　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$
(イ)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
(ウ)　$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ となる数 k がある.
(エ)　$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 1$

(2)　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が垂直であるための条件として正しいものをすべて選べ.

(ア)　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$
(イ)　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
(ウ)　$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ となる数 k がある.
(エ)　$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 1$

第 2 章

基礎数学 2

2.1　微分係数

2.1.1　第 1 回

66.　次の空欄を埋めよ.

傾きが m, y 切片が n の直線の方程式は $y = \boxed{\text{ア}}$ である. また, 傾きが m で, 点 (a, b) を通る直線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}$ である. 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(x_1 \neq x_2)$ を通る直線の傾きは, $\boxed{\text{ウ}}$ である.

67.　次の直線の方程式を求めよ.

(1)　傾きが 2, y 切片が 3 の直線　(2)　傾きが -1, y 切片が 5 の直線
(3)　傾きが 3 で, 点 $(1, 2)$ を通る直線　(4)　傾きが -2 で, 点 $(3, -1)$ を通る直線
(5)　直線 $y = 2x + 1$ に平行で, 点 $(-1, 3)$ を通る直線
(6)　直線 $y = -3x + 5$ に平行で, 点 $(-2, -3)$ を通る直線

68.　次の 2 点を通る直線の傾きを求めよ.

(1)　A $(2, 3)$, B $(3, 4)$　(2)　A $(1, 1)$, B $(2, 4)$　(3)　A $(3, 1)$, B $(5, 7)$
(4)　A $(1, 5)$, B $(4, 2)$　(5)　A $(2, 3)$, B $(5, 2)$　(6)　A $(3, 6)$, B $(6, 0)$
(7)　A $(-1, 1)$, B $(3, 7)$　(8)　A $(-2, 1)$, B $(4, -3)$　(9)　A $(-1, -3)$, B $(2, 1)$
(10)　A $(-5, -4)$, B $(-2, 5)$

69.　次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ.

(1)　A $(2, 3)$, B $(3, 4)$　(2)　A $(1, 1)$, B $(2, 4)$　(3)　A $(3, 1)$, B $(5, 7)$
(4)　A $(1, 5)$, B $(4, 2)$　(5)　A $(2, 3)$, B $(5, 2)$　(6)　A $(3, 6)$, B $(6, 0)$
(7)　A $(-1, 1)$, B $(3, 7)$　(8)　A $(-2, 1)$, B $(4, -3)$　(9)　A $(-1, -3)$, B $(2, 1)$
(10)　A $(-5, -4)$, B $(-2, 5)$

70.　次の関数 $f(x)$ について, $f(1)$ を求めよ.

(1)　$f(x) = x + 1$　(2)　$f(x) = 2x + 3$　(3)　$f(x) = 3x - 2$
(4)　$f(x) = -x + 3$　(5)　$f(x) = -4x + 5$

71.　次の関数 $f(x)$ について, $f(-2)$ を求めよ.

(1)　$f(x) = x^2 + 3x$　(2)　$f(x) = x^2 - 2x$　(3)　$f(x) = 2x^2 - 1$
(4)　$f(x) = -x^2 + x$　(5)　$f(x) = -2x^2 + 2x$

72.　次の関数 $f(x)$ について, $f(a + 2)$ を求めよ.

(1)　$f(x) = x + 3$　(2)　$f(x) = 2x + 4$　(3)　$f(x) = -3x + 2$
(4)　$f(x) = x^2 - x$　(5)　$f(x) = x^2 + 3x$

73.　次の関数 $f(x)$ について, $f(x + 1)$ を求めよ.

(1)　$f(x) = x - 2$　(2)　$f(x) = 3x + 1$　(3)　$f(x) = -2x - 1$

(4)　$f(x) = x^2 + 3$　(5)　$f(x) = x^2 - 2x$

74.　次の関数 $f(x)$ について, $f(x+h)$ を求めよ.

(1)　$f(x) = 3x$　(2)　$f(x) = -4x$　(3)　$f(x) = x^2$

(4)　$f(x) = -2x^2$　(5)　$f(x) = x^3$

75.　次の空欄を埋めよ.

関数 $f(x)$ について, 値 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ を $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの $\boxed{\text{ア}}$ という. また, 極限値

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を $f(x)$ の $x = a$ における $\boxed{\text{イ}}$ という. $x = a$ に対し, その $\boxed{\text{イ}}$ $f'(a)$ を対応させる関数を $\boxed{\text{ウ}}$ といい, $\boxed{\text{ウ}}$ を求めることを $\boxed{\text{エ}}$ するという.

76.　次の値を求めよ.

(1)　関数 $f(x) = 2x + 1$ の $x = 1$ から $x = 3$ までの平均変化率
(2)　関数 $f(x) = x^2$ の $x = 1$ から $x = 2$ までの平均変化率
(3)　関数 $f(x) = x^2$ の $x = 2$ から $x = 3$ までの平均変化率
(4)　関数 $f(x) = x^2$ の $x = 1$ から $x = 3$ までの平均変化率
(5)　関数 $f(x) = x^2 + 3$ の $x = -2$ から $x = 1$ までの平均変化率
(6)　関数 $f(x) = x^2 + x$ の $x = 1$ から $x = 4$ までの平均変化率
(7)　関数 $f(x) = x^2 - 2x$ の $x = 2$ から $x = 3$ までの平均変化率
(8)　関数 $f(x) = x^3$ の $x = -1$ から $x = 1$ までの平均変化率
(9)　関数 $f(x) = x^3 - x$ の $x = 2$ から $x = 3$ までの平均変化率
(10)　関数 $f(x) = x^3 + x^2$ の $x = -1$ から $x = 2$ までの平均変化率

77.　次の空欄を埋めよ.

(1)　$f(x) = x^2$ の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ は次のように求められる.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boxed{\text{ア}}\right) - f\left(\boxed{\text{イ}}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ウ}}}{h} = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{エ}} = \boxed{\text{オ}}$$

(2)　$f(x) = x^2$ の $x = 2$ における微分係数 $f'(2)$ は次のように求められる.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boxed{\text{カ}}\right) - f\left(\boxed{\text{キ}}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ク}}}{h} = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{ケ}} = \boxed{\text{コ}}$$

(3)　$f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数 $f'(3)$ は次のように求められる.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boxed{\text{サ}}\right) - f\left(\boxed{\text{シ}}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ス}}}{h} = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{セ}} = \boxed{\text{ソ}}$$

(4)　$f(x) = 2x^2$ の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ は次のように求められる.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boxed{\text{タ}}\right) - f\left(\boxed{\text{チ}}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ツ}}}{h} = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{テ}} = \boxed{\text{ト}}$$

(5)　$f(x) = 3x^2$ の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ は次のように求められる.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\boxed{\text{ナ}}\right) - f\left(\boxed{\text{ニ}}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{h} = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{ネ}} = \boxed{\text{ノ}}$$

(6)　$f(x)=-x^2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は次のように求められる.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\boxed{\text{ハ}}\right)-f\left(\boxed{\text{ヒ}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{フ}}}{h}=\lim_{h\to 0}\boxed{\text{ヘ}}=\boxed{\text{ホ}}$$

78.　次の値を求めよ.

(1)　関数 $f(x)=2x+3$ について, $x=1$ における微分係数 $f'(1)$

(2)　関数 $f(x)=2x+3$ について, $x=2$ における微分係数 $f'(2)$

(3)　関数 $f(x)=x^2+3$ について, $x=1$ における微分係数 $f'(1)$

(4)　関数 $f(x)=x^2+3$ について, $x=2$ における微分係数 $f'(2)$

(5)　関数 $f(x)=x^2-x$ について, $x=3$ における微分係数 $f'(3)$

(6)　関数 $f(x)=x^2-x$ について, $x=4$ における微分係数 $f'(4)$

(7)　関数 $f(x)=x^2-2x+4$ について, $x=1$ における微分係数 $f'(1)$

(8)　関数 $f(x)=x^2-2x+4$ について, $x=2$ における微分係数 $f'(2)$

(9)　関数 $f(x)=x^3$ について, $x=1$ における微分係数 $f'(1)$

(10)　関数 $f(x)=x^3$ について, $x=2$ における微分係数 $f'(2)$

2.1.2　第 2 回

79.　次の微分の計算に関して, 空欄を埋めよ.

(1)　$(4x)'=4\cdot\boxed{\text{ア}}'=4\cdot\boxed{\text{イ}}=\boxed{\text{ウ}}$

(2)　$(3x^2)'=3\cdot\boxed{\text{エ}}'=3\cdot\boxed{\text{オ}}=\boxed{\text{カ}}$

(3)　$(-x^3)'=(-1)\cdot\boxed{\text{キ}}'=(-1)\cdot\boxed{\text{ク}}=\boxed{\text{ケ}}$

(4)　$(2x+1)'=2\cdot\boxed{\text{コ}}'+(1)'=2\cdot\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}=\boxed{\text{ス}}$

(5)　$(x^4+x^2)'=(x^4)'+\boxed{\text{セ}}'=\boxed{\text{ソ}}+\boxed{\text{タ}}=2x\left(\boxed{\text{チ}}\right)$

80.　次の関数を微分せよ.

(1)　$f(x)=4$　(2)　$f(x)=7$　(3)　$f(x)=-2$

(4)　$f(x)=3x$　(5)　$f(x)=-5x$　(6)　$f(x)=x+2$

(7)　$f(x)=5x+3$　(8)　$f(x)=-2x-3$　(9)　$f(x)=6x+1$

(10)　$f(x)=2x^2$　(11)　$f(x)=-3x^2$　(12)　$f(x)=x^2+x$

(13)　$f(x)=-x^2+1$　(14)　$f(x)=x^2+3x+2$　(15)　$f(x)=3x^2+2x-2$

(16)　$f(x)=3x^3$　(17)　$f(x)=x^3-3x^2$　(18)　$f(x)=x^4+x^2$

(19)　$f(x)=x^4-2x^3-1$　(20)　$f(x)=x^5-x^3+x-1$

81.　次の関数 $f(x)$ について微分し, 微分係数 $f'(2)$ を求めよ.

(1)　$f(x)=2x+1$　(2)　$f(x)=x^2$　(3)　$f(x)=x^2-x$

(4)　$f(x)=3x^2+1$　(5)　$f(x)=2x^2+3x+2$　(6)　$f(x)=x^3$

(7)　$f(x)=2x^3-1$　(8)　$f(x)=x^3-2x$　(9)　$f(x)=x^3+x^2$

(10)　$f(x)=3x^3+2x^2+x$

2.2　微分の計算 (1)

2.2.1　前回の復習

82.　次の関数を展開して微分せよ.

(1)　$f(x) = (x+1)(x+2)$　(2)　$f(x) = (x-2)(x+3)$　(3)　$f(x) = (x+3)(x-3)$

(4)　$f(x) = (2x-3)(5x-4)$　(5)　$f(x) = (2x+1)(3x-2)$　(6)　$f(x) = (3x+5)(5x-4)$

(7)　$f(x) = (2x-1)(3-x)$　(8)　$f(x) = (4x-3)(4-5x)$　(9)　$f(x) = (x-1)^3$

(10)　$f(x) = (x-2)(x^2+2x+4)$

83.　次の関数を [ ] 内の文字で微分せよ.

(1)　$y = v_0 + at$　$[t]$　(2)　$y = \pi r^2$　$[r]$　(3)　$y = \dfrac{1}{2}gt^2$　$[t]$

(4)　$y = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$　$[r]$　(5)　$y = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$　$[h]$　(6)　$y = \dfrac{4}{3}\pi r^3$　$[r]$

2.2.2　第 3 回

84.　次の空欄を埋めよ.

実数 α に対し, $\{x^\alpha\}' = \boxed{\text{ア}}$ が成り立つ. これを用いると,

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \boxed{\text{イ}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = \boxed{\text{ウ}} = -\frac{1}{x^2}$$

である. 関数 $f(t)$ の導関数を $f'(t)$ とすると,

$$\{f(ax+b)\}' = \boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ. ただし, a は 0 でない定数, b は定数とする.

85.　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = x^{\frac{3}{2}}$　(2)　$y = x^{\frac{1}{3}}$　(3)　$y = x^{\frac{4}{5}}$　(4)　$y = x^{\frac{4}{3}}$

(5)　$y = x^{-\frac{1}{3}}$　(6)　$y = x^{-\frac{3}{2}}$　(7)　$y = x^{-\frac{5}{4}}$　(8)　$y = x^{-\frac{2}{7}}$

(9)　$y = \sqrt[3]{x^2}$　(10)　$y = \sqrt[4]{x^3}$　(11)　$y = \sqrt[5]{x^6}$　(12)　$y = \sqrt{x^7}$

(13)　$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$　(14)　$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$　(15)　$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$　(16)　$y = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$

86.　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = x^3 + x$　(2)　$y = x^4 - x^2 + x$　(3)　$y = x^7 + x^5 - x^2$

(4)　$y = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$　(5)　$y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{7}{3}}$　(6)　$y = x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{7}{4}}$

(7)　$y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$　(8)　$y = 5x^4 - 6x^{\frac{5}{2}}$　(9)　$y = 4x^{-\frac{1}{6}} - 9x^{\frac{2}{3}}$

(10)　$y = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$　(11)　$y = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$　(12)　$y = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}$

(13)　$y = 4x^2\sqrt{x}$　(14)　$y = 3x\sqrt[3]{x}$　(15)　$y = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt[5]{x^2}$

(16)　$y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$　(17)　$y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$　(18)　$y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(19)　$y = x^2 - 2\sqrt{x} + 1$　(20)　$y = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 1$

87.　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (3x+2)^2$　(2)　$y = (4x-3)^3$　(3)　$y = (2-x)^5$

(4)　$y = (5-2x)^3$　(5)　$y = (5x+2)^{-2}$　(6)　$y = (4-3x)^{-3}$

(7)　$y = \sqrt{2x+1}$　(8)　$y = \sqrt{3x+10}$　(9)　$y = \sqrt{7-3x}$

(10)　$y = \sqrt{5-6x}$　(11)　$y = \sqrt[3]{3x-2}$　(12)　$y = \sqrt{(4x+1)^3}$

(13) $y = \sqrt[4]{(x-1)^3}$　(14) $y = \sqrt[3]{(7-2x)^5}$　(15) $y = \dfrac{1}{4x+1}$

(16) $y = \dfrac{1}{3-2x}$　(17) $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}$　(18) $y = \dfrac{1}{(5-3x)^2}$

(19) $y = \dfrac{3}{\sqrt{6x+3}}$　(20) $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$

88.　次の関数を展開して微分せよ.

(1) $y = (x+2)(2x-1)$　(2) $y = (3x+1)(1-3x)$　(3) $y = (x+2)(3x-2)$

(4) $y = (2x+3)(x-2)$　(5) $y = (x^2+3)(4x+1)$　(6) $y = (x^2-2)(3x+2)$

(7) $y = (2x^2-1)(x-3)$　(8) $y = (x^2+2x)(x-2)$

2.2.3　第 4 回

89.　次の空欄を埋めよ.

$f(x)$, $g(x)$ を関数とする. 積 $f(x)g(x)$ について, 積の微分法の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ. これを用いると,

$$\begin{aligned}\{(2x+1)(3x+2)\}' &= \left(\boxed{\text{イ}}\right)' \cdot (3x+2) + (2x+1) \cdot \left(\boxed{\text{ウ}}\right)' \\ &= \boxed{\text{エ}} \cdot (3x+2) + (2x+1) \cdot \boxed{\text{オ}} \\ &= \boxed{\text{カ}} \\ \left\{(4x-1)\sqrt{x+1}\right\}' &= \left(\boxed{\text{キ}}\right)' \cdot \sqrt{x+1} + (4x-1) \cdot \left\{\boxed{\text{ク}}\right\}' \\ &= \boxed{\text{ケ}} \cdot \sqrt{x+1} + (4x-1) \cdot \boxed{\text{コ}} \\ &= \frac{\boxed{\text{サ}}}{2\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

と計算できる.

90.　積の微分法 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を用いて, 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x+2)(2x-1)$　(2) $y = (3x+1)(1-3x)$　(3) $y = (x+2)(3x-2)$

(4) $y = (2x+3)(x-2)$　(5) $y = (x^2+3)(4x+1)$　(6) $y = (x^2-2)(3x+2)$

(7) $y = (2x^2-1)(x-3)$　(8) $y = (x^2+2x)(x-2)$

91.　次の空欄を埋めよ.

$f(x)$, $g(x)$ を関数とする. 商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ について, 商の微分法の公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ. 特に, $f(x) = 1$ のとき, $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = \boxed{\text{イ}}$ である.

92.　商の微分法

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}, \qquad \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を用いて, 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{1}{2x+3}$　(2) $y=\dfrac{1}{1+3x}$　(3) $y=\dfrac{1}{2-x}$　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(5) $y=\dfrac{x+2}{x+3}$　(6) $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$　(7) $y=\dfrac{2x+3}{3x+4}$　(8) $y=\dfrac{4x+6}{2x+3}$

(9) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$　(10) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$　(11) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+1}$　(12) $y=\dfrac{\sqrt{2x}+4}{\sqrt{2x}}$

2.3　微分の計算 (2)

2.3.1　前回の復習

93.　積の微分法を用いて, 次の関数を微分せよ.

(1) $y=(x^2+x+1)(2x+1)$　(2) $y=(x^2+x+3)(1-x)$　(3) $y=(2x^2-5x)(x^2+1)$

(4) $y=(x^2+3x)(2-3x)$　(5) $y=(x^2+3x+2)(x+2)$　(6) $y=(x+1)\sqrt{x}$

(7) $y=x\sqrt{x+1}$　(8) $y=(2x+1)\sqrt{x+3}$　(9) $y=(3x+2)\sqrt{2x-1}$

(10) $y=(x^2+1)\sqrt{x}$　(11) $y=(x+1)\sqrt[3]{x}$　(12) $y=(2x-1)\sqrt[3]{x^2}$

(13) $y=(x^2+x)\sqrt[4]{x+1}$

94.　商の微分法を用いて, 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{1}{x+3}$　(2) $y=\dfrac{1}{2x+1}$　(3) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　(4) $y=\dfrac{4}{x^3+3}$

(5) $y=\dfrac{2}{2x^2+3}$　(6) $y=\dfrac{x+4}{x+2}$　(7) $y=\dfrac{x+3}{x+5}$　(8) $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$

(9) $y=\dfrac{3x+1}{5x-2}$　(10) $y=\dfrac{1+2x}{1-4x}$　(11) $y=\dfrac{1-3x}{3+5x}$　(12) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

(13) $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$　(14) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$　(15) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$　(16) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

(17) $y=\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$　(18) $y=\dfrac{3}{(2-x)^2}$　(19) $y=\dfrac{(x+3)^2}{2x+1}$　(20) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

95.　次の関数を微分せよ.

(1) $y=(x^2-3x+1)(2-x^2)$　(2) $y=(x^2+x+1)(x^2-3x+1)$

(3) $y=(x^2+3)(x-1)^2$　(4) $y=(2x-1)^2(3x+1)^2$

(5) $y=(x^2-3x+2)^2(x-2)^3$　(6) $y=(x^2+x-1)\sqrt{x+1}$

(7) $y=(x^2+2)(x-1)(x-2)$　(8) $y=(x^2+x+1)(x^2+1)(x-1)$

2.3.2　第 5 回

96.　次の空欄を埋めよ.

関数 $y=f(t)$ と $t=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ について,

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{\text{ア}}=f'(g(x))\cdot\boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ.

97.　関数 $y=f(t)$ と $t=g(x)$ の合成関数 $f(g(x))$ を答えよ.

(1) $f(t)=t^2,\ t=x^2+1$　(2) $f(t)=t^3,\ t=x^2+x-2$

(3) $f(t)=t^4,\ t=x^3+x$　(4) $f(t)=t^{-1},\ t=x^2-1$

(5) $f(t)=t^{-2},\ t=x^5+3$　(6) $f(t)=\dfrac{1}{t^2},\ t=x^3+2$

(7) $f(t)=t^2,\ t=\dfrac{x-1}{x-2}$　(8) $f(t)=\cos t,\ t=x^2+1$

(9)　$f(t) = \tan t,\ t = x - 1$　　(10)　$f(t) = t^2 \cos t,\ t = 2x + 3$
(11)　$f(t) = t^2,\ t = \cos x$　　(12)　$f(t) = \log t,\ t = x^2 + 3x + 2$
(13)　$f(t) = t^3,\ t = \log x$　　(14)　$f(t) = \sqrt{t},\ t = x^2 + 1$
(15)　$f(t) = \sqrt[3]{t},\ t = x^2 + x - 1$　　(16)　$f(t) = \dfrac{1}{t},\ t = 2x^2 - 3$
(17)　$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}},\ t = 3x^2 + 1$　　(18)　$f(t) = \sin t,\ t = 3x$
(19)　$f(t) = e^t,\ t = x^2 + 4x + 1$　　(20)　$f(t) = \dfrac{1}{t},\ t = \sin^2 x + 1$
(21)　$f(t) = e^t,\ t = \cos 2x$　　(22)　$f(t) = \log |t|,\ t = \sin x$

98.　次の関数は, どのような関数 $y = f(t)$ と $t = g(x)$ の合成関数と考えられるか.

(1)　$\sqrt{6x - 1}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$　　(3)　$\cos 3x$　　(4)　$\sin 5x$　　(5)　$\tan 2x$
(6)　e^{-4x}　　(7)　e^{-x^2+1}　　(8)　$\log 10x$　　(9)　$(x^2 + 1)^5$　　(10)　$\cos(2x + 1)$

99.　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = (2x + 1)^2$　　(2)　$y = (1 - 3x)^3$　　(3)　$y = (2 + 5x)^4$
(4)　$y = \left(x^2 + 1\right)^2$　　(5)　$y = \left(x^2 + x - 2\right)^3$　　(6)　$y = \left(2x^2 - 3\right)^3$
(7)　$y = \left(x^3 + x\right)^4$　　(8)　$y = \left(1 - x^2\right)^5$　　(9)　$y = \left(x^2 - 1\right)^{-1}$
(10)　$y = \left(3x^2 + 2\right)^{-2}$　　(11)　$y = \left(x^5 + 3\right)^{-2}$　　(12)　$y = \left(2x^2 - x + 1\right)^{\frac{3}{2}}$
(13)　$y = \dfrac{1}{(x^3 + 2)^2}$　　(14)　$y = \dfrac{1}{(1 - 4x^2)^2}$　　(15)　$y = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$
(16)　$y = \left(\dfrac{x - 1}{x - 2}\right)^2$　　(17)　$y = \sqrt{x^2 + 1}$　　(18)　$y = \sqrt{4 - x^2}$
(19)　$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$　　(20)　$y = \dfrac{1}{2x^2 - 3}$　　(21)　$y = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}}$
(22)　$y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$　　(23)　$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2}}$

100.　次の関数を微分せよ.

(1)　$y = \dfrac{1}{(x^2 - x + 1)^2}$　　(2)　$y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x + 1}}$　　(3)　$y = \dfrac{1}{(\sqrt{x} + 1)^3}$
(4)　$y = \dfrac{1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$　　(5)　$y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$　　(6)　$y = \left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)^2$
(7)　$y = (\sqrt{x} + 1)^3$　　(8)　$y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^4}$　　(9)　$y = \sqrt[5]{(3x^2 - x^3)^2}$
(10)　$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(5x^3 - x)^7}}$　　(11)　$y = \dfrac{1}{\sqrt[6]{(x^2 + 6x)^5}}$　　(12)　$y = \sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)^3$

2.3.3　第 6 回

101.　次の空欄を埋めよ.

三角関数の導関数は,

$$(\sin x)' = \boxed{\text{ア}},\qquad (\cos x)' = \boxed{\text{イ}},\qquad (\tan x)' = \boxed{\text{ウ}}$$

である. したがって, a, b が定数のとき,

$$\{\sin(ax + b)\}' = \boxed{\text{エ}},\quad \{\cos(ax + b)\}' = \boxed{\text{オ}},\quad \{\tan(ax + b)\}' = \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ.

102.　次の空欄を埋めよ.

$y = \cos(x^2 + 1)$ の導関数を考える. $y = \cos(x^2 + 1)$ は $f(t) = \boxed{\text{ア}}$, $t = \boxed{\text{イ}}$ の合成関数と考えら

れるので, 合成関数の微分法を用いると,

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\text{ウ}} \cdot \frac{dt}{dx} = \boxed{\text{ア}}' \cdot \boxed{\text{イ}}' = \boxed{\text{エ}} \cdot \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}$$

103.　$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ を用いて, 次の関数を微分せよ.

(1) $y = -\sin x$　(2) $y = -2\cos x$　(3) $y = \sin 2x$　(4) $y = \cos 3x$
(5) $y = -3\sin 2x$　(6) $y = 4\cos 3x$　(7) $y = \sin(4x+1)$　(8) $y = \cos(1-2x)$
(9) $y = \sin^2 x$　(10) $y = \cos^2 x$　(11) $y = \sin(x^2+1)$　(12) $y = \cos(1-2x^2)$
(13) $y = 2\sin x\cos x$　(14) $y = \sin^2 x\cos x$　(15) $y = \sin x\cos^2 2x$
(16) $y = \dfrac{1}{\sin x}$　(17) $y = \dfrac{1}{\cos x}$　(18) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
(19) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$　(20) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$　(21) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2.4　微分の計算 (3)

2.4.1　前回の復習

104.　次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin 3x$　(2) $y = \sin(-2x)$　(3) $y = \cos 4x$　(4) $y = \cos(-7x)$
(5) $y = \dfrac{\sin(3x+2)}{3}$　(6) $y = \dfrac{\sin(1-2x)}{2}$　(7) $y = \dfrac{\cos(x+5)}{5}$　(8) $y = \dfrac{\cos(3-6x)}{3}$
(9) $y = \sin\left(x^2\right)$　(10) $y = \cos\left(x^2\right)$　(11) $y = \sin\left(1-x^2\right)$　(12) $y = \cos\left(3x^2+1\right)$
(13) $y = x^3\sin 3x$　(14) $y = x^2\cos 2x$　(15) $y = (x-1)\sin 3x$
(16) $y = (x+2)\cos 5x$　(17) $y = (1-2x)\cos(x-1)$　(18) $y = (5x+4)\sin(3x+2)$
(19) $y = x\sin x + \cos x$　(20) $y = x\cos x - \sin x$　(21) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + 1}$
(22) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$　(23) $y = \dfrac{1}{(1+\sin x)^2}$　(24) $y = \dfrac{1}{(1+\cos x)^2}$
(25) $y = \tan 2x$　(26) $y = \tan 7x$　(27) $y = \tan(-3x)$　(28) $y = \tan(3-2x)$
(29) $y = \tan^2 x$　(30) $y = \tan\left(x^2+1\right)$　(31) $y = \tan\left(\sqrt{x}\right)$　(32) $y = \dfrac{1}{\tan 3x}$
(33) $y = \dfrac{1}{\tan(-4x)}$　(34) $y = \dfrac{1}{\tan(x^2)}$　(35) $y = \dfrac{1}{\tan(3-x^2)}$
(36) $y = \dfrac{1}{\tan x + 1}$　(37) $y = \dfrac{1}{2+\tan 2x}$　(38) $y = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$
(39) $y = \dfrac{\tan x}{1+\tan x}$　(40) $y = (x-1)\tan 2x$　(41) $y = x^2\tan 3x$

2.4.2　第 7 回

105.　次の空欄を埋めよ.

指数関数, 対数関数の導関数は,

$$(e^x)' = \boxed{\text{ア}},\qquad (\log x)' = \boxed{\text{イ}},\qquad (\log|x|)' = \boxed{\text{ウ}}$$

である. したがって, a, b が定数のとき,

$$\left\{e^{ax+b}\right\}' = \boxed{\text{エ}},\qquad \{\log(ax+b)\}' = \boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ.

106.　次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^{3x}$　(2) $y = e^{7x}$　(3) $y = e^{-5x}$　(4) $y = e^{-9x}$
(5) $y = e^{2x+1}$　(6) $y = e^{5x+3}$　(7) $y = e^{6-x}$　(8) $y = e^{3-2x}$

(9) $y=e^x-e^{-x}$ (10) $y=e^{-2x}+e^{3x}$ (11) $y=2e^x-e^{2x}$ (12) $y=e^{-x}-e^{-2x}$
(13) $y=e^{x^2+1}$ (14) $y=e^{x^2+2x}$ (15) $y=e^{\sqrt{x+1}}$ (16) $y=e^{\sqrt[3]{x}}$
(17) $y=2xe^{-x}$ (18) $y=x^2e^{2x}$ (19) $y=\sqrt{x}e^x$ (20) $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$
(21) $y=(x-1)e^{3x}$ (22) $y=(2x+1)e^{2x}$ (23) $y=(x-2)^2e^x$ (24) $y=(e^x+1)^2(e^x-1)^3$
(25) $y=e^x\sin x$ (26) $y=e^x\cos x$ (27) $y=e^{2x}\sin 3x$ (28) $y=e^{-x}\cos 2x$
(29) $y=e^{\cos x}$ (30) $y=e^{\sin 2x}$ (31) $y=e^{\sin x+\cos x}$ (32) $y=e^{\tan x}$
(33) $y=\dfrac{e^x+1}{x}$ (34) $y=\dfrac{e^{-x}+1}{x^2}$ (35) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ (36) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
(37) $y=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ (38) $y=\dfrac{1}{e^{2x}+e^x+1}$ (39) $y=\dfrac{e^{-3x}}{e^{3x}+1}$ (40) $y=\dfrac{e^{-x}}{(e^x+1)^2}$

107. 次の関数を微分せよ.

(1) $y=2\log x+2$ (2) $y=\log 2x$ (3) $y=\log(-5x)$ (4) $y=\log\dfrac{x}{2}$
(5) $y=\log\left(-\dfrac{x}{3}\right)$ (6) $y=\log(x+3)$ (7) $y=\log(x-5)$ (8) $y=\log(x+7)$
(9) $y=\log(x-2)$ (10) $y=\log(3-x)$ (11) $y=2\log(x+2)$ (12) $y=\log(2x+5)$
(13) $y=\log(7x+4)$ (14) $y=\log(5-2x)$ (15) $y=\log\dfrac{x-3}{2}$ (16) $y=\log\dfrac{4-3x}{5}$
(17) $y=\log\left(x^2+x+1\right)$ (18) $y=\log\left(x^2+4x+4\right)$ (19) $y=\log\left(1-x^2\right)$
(20) $y=\log\left(x^3-1\right)$ (21) $y=\log\left(x^2+4\right)$ (22) $y=\log\left(x^4+x^2\right)$ (23) $y=\log\left(2x-x^2\right)$
(24) $y=\log x^3$ (25) $y=\log(x+2)^2$ (26) $y=\log(x+1)^5$ (27) $y=\log(x-2)^7$
(28) $y=\log\sqrt{x}$ (29) $y=\log(1+\sqrt{x})$ (30) $y=\log\left(2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)$
(31) $y=(\log x)^2$ (32) $y=(\log x-2)^3$ (33) $y=x^2\log x$ (34) $y=\log(x^2+1)(x-3)$
(35) $y=\log\sin x$ (36) $y=\log\cos x$ (37) $y=\log\sin 3x$ (38) $y=\log\cos(1-2x)$
(39) $y=\dfrac{\log x}{x}$ (40) $y=x\log x-x$ (41) $y=x\log\dfrac{1}{x}+x$ (42) $y=\log\dfrac{x+3}{x-1}$
(43) $y=\log\dfrac{2x-1}{2x+3}$ (44) $y=\log\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)^4}$

2.5 不定積分 (1)

2.5.1 前回の復習

108. 次の文章の空欄を埋めよ.

関数 $y=5^x$ を考える. 両辺の対数をとり, 対数の性質を用いると,

$$\log y=\log 5^x=\boxed{\text{ア}}$$

となる. $(\log t)'=\boxed{\text{イ}}$ より, 合成関数の微分法を用いてこの両辺を x で微分すると,

$$\frac{y'}{y}=\boxed{\text{ウ}}$$

を得る. したがって,

$$y'=y\,\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}}$$

109. 次を計算せよ. ただし, a は $a>0$, $a\neq 1$ を満たす定数とする.

(1) $(2^x)'$ (2) $(3^x)'$ (3) $(6^x)'$ (4) $(7^x)'$ (5) $(a^x)'$ (6) $(e^x)'$

2.5.2 第 9 回

110. 次の空欄を埋めよ.

次の不定積分の公式が成り立つ．(積分定数は省略する)

$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \boxed{\text{ア}} & \alpha \neq -1 \text{ のとき} \\ \boxed{\text{イ}} & \alpha = -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

特に, $\alpha = -1$ の場合から,

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\text{イ}}$$

を得る．また, 三角関数, 指数関数については,

$$\int \sin x\,dx = \boxed{\text{ウ}},\quad \int \cos x\,dx = \boxed{\text{エ}},\quad \int e^x\,dx = \boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ．さらに, $f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると,

$$\int f(ax+b)\,dx = \boxed{\text{カ}}$$

である．ただし, a, b は定数である．この公式より,

$$\int (ax+b)^\alpha\,dx = \boxed{\text{キ}}\quad (\alpha \neq -1 \text{ のとき}),\qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \boxed{\text{ク}},$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \boxed{\text{ケ}},\qquad \int \cos(ax+b)\,dx = \boxed{\text{コ}},$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \boxed{\text{サ}}$$

である．

111.　次の不定積分を求めよ．ただし, 積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int dx$　(2) $\displaystyle\int 3\,dx$　(3) $\displaystyle\int 2x\,dx$　(4) $\displaystyle\int 3x^2\,dx$　(5) $\displaystyle\int 4x^3\,dx$

(6) $\displaystyle\int x^{\frac{7}{6}}\,dx$　(7) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$　(8) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$　(9) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　(10) $\displaystyle\int x\sqrt[4]{x}\,dx$

(11) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x}\,dx$　(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$　(13) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx$　(14) $\displaystyle\int \frac{5}{x^3}\,dx$　(15) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\,dx$　(17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$　(18) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$　(19) $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$　(20) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

112.　次の不定積分を求めよ．ただし, 積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int (x-2)\,dx$　(2) $\displaystyle\int (x+3)\,dx$　(3) $\displaystyle\int (2x+5)\,dx$　(4) $\displaystyle\int (3x+1)\,dx$

(5) $\displaystyle\int (5x+3)\,dx$　(6) $\displaystyle\int (1-6x)\,dx$　(7) $\displaystyle\int (2-5x)\,dx$　(8) $\displaystyle\int (3-4x)\,dx$

(9) $\displaystyle\int \left(1-3x^2\right)\,dx$　(10) $\displaystyle\int \left(x^2-2x+1\right)\,dx$　(11) $\displaystyle\int \left(x^2+2x-3\right)\,dx$

(12) $\displaystyle\int \left(x^2-3x+2\right)\,dx$　(13) $\displaystyle\int \left(3x^2-2x\right)\,dx$　(14) $\displaystyle\int \left(5-4x+x^2\right)\,dx$

(15) $\displaystyle\int \left(x^3-x\right)\,dx$　(16) $\displaystyle\int \left(2x^3-3x^2+x\right)\,dx$　(17) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\,dx$

(18) $\displaystyle\int (3x^2+4x-1)\,dx + \int (1-2x)\,dx$　(19) $\displaystyle\int (x^2-2x)\,dx + \int (3+4x-x^2)\,dx$

(20) $\displaystyle\int (x^3-2x)\,dx + \int (3x^3+3x^2+4x)\,dx$

113.　次の不定積分を求めよ．ただし, 積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int (x-1)(x+2)\,dx$　(2) $\displaystyle\int (x+2)(x+3)\,dx$　(3) $\displaystyle\int (x-5)(x+4)\,dx$

(4) $\displaystyle\int (x-3)(x+3)\,dx$　(5) $\displaystyle\int (x-6)^2\,dx$　(6) $\displaystyle\int 6(x^2+x+1)\,dx$

(7) $\displaystyle\int x^2(x-2)\,dx$　(8) $\displaystyle\int x(x^2-4)\,dx$　(9) $\displaystyle\int (x-2)(x^2+2x+4)\,dx$

(10) $\displaystyle\int (x+1)^3\,dx$　(11) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-1)\,dx$　(12) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x+3)\,dx$

(13) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^2-1)\,dx$　(14) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(x+2)\,dx$　(15) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^3}(x-1)\,dx$　(16) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}\,dx$

(17) $\displaystyle\int \frac{3-x}{\sqrt{x}}\,dx$　(18) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x}}\,dx$　(19) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$　(20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}\,dx$

114.　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int (3x+4)^2\,dx$　(2) $\displaystyle\int (2-7x)^2\,dx$　(3) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx$　(4) $\displaystyle\int (3-x)^3\,dx$

(5) $\displaystyle\int (5x-1)^4\,dx$　(6) $\displaystyle\int (5-3x)^4\,dx$　(7) $\displaystyle\int (x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx$　(8) $\displaystyle\int (2x-3)^{-\frac{2}{3}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int (3x+4)^{-\frac{3}{4}}\,dx$　(10) $\displaystyle\int (5-2x)^{\frac{3}{4}}\,dx$　(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+5}$　(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-3}$

(13) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-5}$　(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+4}$　(15) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-x}$　(16) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-6x}$

(17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-4)^2}$　(18) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x+7)^3}$　(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-2x)^3}$　(20) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-4)^4}$

(21) $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,dx$　(22) $\displaystyle\int \sqrt{7-x}\,dx$　(23) $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x+5}\,dx$　(24) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(4x-3)^3}\,dx$

(25) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$　(26) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$　(27) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$　(28) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+3)^5}}$

(29) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx$　(30) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$　(31) $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx$　(32) $\displaystyle\int e^{4-3x}\,dx$

(33) $\displaystyle\int \sin 3x\,dx$　(34) $\displaystyle\int \sin(-2x)\,dx$　(35) $\displaystyle\int \sin(5x+4)\,dx$　(36) $\displaystyle\int \sin(3-x)\,dx$

(37) $\displaystyle\int \cos 5x\,dx$　(38) $\displaystyle\int \cos(-4x)\,dx$　(39) $\displaystyle\int \cos(2x-5)\,dx$　(40) $\displaystyle\int \cos(3-2x)\,dx$

115.　次の文章の空欄を埋めよ．

$\displaystyle\int 5^x\,dx$ を求めよう．そのために，関数 $y=5^x$ を考える．

$$y' = \boxed{\text{ア}}$$

より，両辺を積分すると，

$$y = \int \boxed{\text{ア}}\,dx = \boxed{\text{イ}}\int 5^x\,dx$$

上式の両辺に $\boxed{\text{ウ}}$ をかけて整理すると，

$$\int 5^x\,dx = \boxed{\text{ウ}}\,y = \boxed{\text{エ}}$$

を得る．

116.　次を計算せよ．ただし，a は $a>0,\ a\neq 1$ を満たす定数とする．

(1) $\displaystyle\int 2^x\,dx$　(2) $\displaystyle\int 3^x\,dx$　(3) $\displaystyle\int 6^x\,dx$　(4) $\displaystyle\int 7^x\,dx$　(5) $\displaystyle\int a^x\,dx$　(6) $\displaystyle\int e^x\,dx$

2.5.3　第 10 回

117.　次の文章の空欄を埋めよ.

(1)　$\int x(2x+1)^3\,dx$ を考える. $t=2x+1$ とおくと, $x=\boxed{\text{ア}}$ である. また, 元の式の両辺を x で微分すると, $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\text{イ}}$ となり, $dx=\dfrac{1}{\boxed{\text{イ}}}\,dt$ を得る. したがって,

$$\int x(2x+1)^3\,dx=\int\boxed{\text{ウ}}\,dt=\boxed{\text{エ}}$$

を得る. このように, 置換を行うことによって, 積分を求める方法を置換積分法という.

(2)　$\int x(x+2)^2\,dx$ を考える. $t=x+2$ とおくと, $x=\boxed{\text{オ}}$ である. また, 元の式の両辺を x で微分すると, $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\text{カ}}$ となり, $dx=\dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}\,dt$ を得る. したがって,

$$\int x(x+2)^2\,dx=\int\boxed{\text{キ}}\,dt=\boxed{\text{ク}}$$

を得る.

(3)　$\int 4x(x+1)^3\,dx$ を考える. $t=x+1$ とおくと, $x=\boxed{\text{ケ}}$ である. また, 元の式の両辺を x で微分すると, $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\text{コ}}$ となり, $dx=\dfrac{1}{\boxed{\text{コ}}}\,dt$ を得る. したがって,

$$\int 4x(x+1)^3\,dx=\int\boxed{\text{サ}}\,dt=\boxed{\text{シ}}$$

を得る.

(4)　$\int x\sqrt{x+1}\,dx$ を考える. $t=x+1$ とおくと, $x=\boxed{\text{ス}}$ である. また, 元の式の両辺を x で微分すると, $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\text{セ}}$ となり, $dx=\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}}\,dt$ を得る. したがって,

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int\boxed{\text{ソ}}\,dt=\boxed{\text{タ}}$$

を得る.

(5)　$\int x\sqrt{x-2}\,dx$ を考える. $t=x-2$ とおくと, $x=\boxed{\text{チ}}$ である. また, 元の式の両辺を x で微分すると, $\dfrac{dt}{dx}=\boxed{\text{ツ}}$ となり, $dx=\dfrac{1}{\boxed{\text{ツ}}}\,dt$ を得る. したがって,

$$\int x\sqrt{x-2}\,dx=\int\boxed{\text{テ}}\,dt=\boxed{\text{ト}}$$

を得る.

118.　(　) 内の置換を利用し, 次の不定積分を求めよ.

(1)　$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$　　$(t=1-x^2)$　　(2)　$\int \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx$　　$(t=x^2+1)$

(3)　$\int (x+1)(x^2+2x)^2\,dx$　　$(t=x^2+2x)$　　(4)　$\int \sin^3 x\cos x\,dx$　　$(t=\sin x)$

(5)　$\int \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx$　　$(t=\sin x)$　　(6)　$\int xe^{x^2}\,dx$　　$(t=x^2)$

119.　次の文章の空欄を埋めよ.

積の微分法

$$\{f(x)g(x)\}' = \boxed{\text{ア}}$$

から, 部分積分法の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

を証明してみよう.

積の微分法を変形すると,

$$\boxed{\text{イ}} = \{f(x)g(x)\}' - \boxed{\text{ウ}}$$

である. ここで両辺の不定積分を考えれば,

$$\int \boxed{\text{イ}}\,dx = \int \left(\{f(x)g(x)\}' - \boxed{\text{ウ}}\right)\,dx$$

となり, 不定積分の性質

$$\int \{h_1(x) \pm h_2(x)\}\,dx = \boxed{\text{エ}} \pm \boxed{\text{オ}}$$

を使うと,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \boxed{\text{カ}} - \int f'(x)g(x)\,dx$$

が得られる. $\boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{キ}}$ より, 部分積分法の公式が得られる.

120. 次の文章の空欄を埋めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ を考える. $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ とすれば, $g(x) = \boxed{\text{ア}}$ である.

部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ を用いると,

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= x\boxed{\text{ア}} - \int (x)'\boxed{\text{ア}}dx \\ &= x\boxed{\text{ア}} - \int \boxed{\text{ア}}dx \\ &= x\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}}\end{aligned}$$

を得る.

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ を考える. $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ とすれば, $g(x) = \boxed{\text{エ}}$ である.

部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ を用いると,

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= x\boxed{\text{エ}} - \int (x)'\boxed{\text{エ}}dx \\ &= x\boxed{\text{エ}} - \int \boxed{\text{エ}}dx \\ &= x\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}\end{aligned}$$

を得る.

(3) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$ を考える．$f(x)=x,\ g'(x)=\cos 2x$ とすれば，$g(x)=\boxed{\text{キ}}$ である．

部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,dx &= x\boxed{\text{キ}} - \int (x)'\boxed{\text{キ}}dx\\ &= x\boxed{\text{キ}} - \int \boxed{\text{キ}}dx\\ &= x\boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{ケ}}\end{aligned}$$

を得る．

(4) $\displaystyle\int (2x+1)\sin x\,dx$ を考える．$f(x)=2x+1,\ g'(x)=\sin x$ とすれば，$g(x)=\boxed{\text{コ}}$ である．

部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\sin x\,dx &= (2x+1)\boxed{\text{コ}} - \int (2x+1)'\boxed{\text{コ}}dx\\ &= (2x+1)\boxed{\text{コ}} - \int 2\cdot\boxed{\text{コ}}dx\\ &= (2x+1)\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}} = \boxed{\text{シ}}\end{aligned}$$

を得る．

(5) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$ を考える．$f(x)=x,\ g'(x)=e^{2x}$ とすれば，$g(x)=\boxed{\text{ス}}$ である．

部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,dx &= x\boxed{\text{ス}} - \int (x)'\boxed{\text{ス}}dx\\ &= x\boxed{\text{ス}} - \int \boxed{\text{ス}}dx\\ &= x\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} = \boxed{\text{ソ}}\end{aligned}$$

を得る．

121.　部分積分法 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ を用いて，次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x-1)e^{3x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int 2xe^{x-1}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \log x\,dx$　(4) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(5) $\displaystyle\int x(x+1)^4\,dx$　(6) $\displaystyle\int (x-2)(x+3)^3\,dx$　(7) $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$

(8) $\displaystyle\int x^2\cos(-x)\,dx$　(9) $\displaystyle\int x^3e^x\,dx$

2.6　不定積分 (2)・定積分

2.6.1　前回の復習

122.　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$　(3) $\displaystyle\int (x-4)\,dx$　(4) $\displaystyle\int \left(x^2-x-6\right)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-2)\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$　(7) $\displaystyle\int (2x+1)^4\,dx$　(8) $\displaystyle\int (x-3)^{\frac{6}{5}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+4}$　(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$　(11) $\displaystyle\int \sqrt{3-x}\,dx$　(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+7}}$

(13) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$　(14) $\displaystyle\int e^{-5x}\,dx$　(15) $\displaystyle\int 3x(x+2)^3\,dx$　(16) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x-2}\,dx$

(17) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$　(18) $\displaystyle\int xe^{2-x}\,dx$　(19) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$　(20) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$

123.　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

2.6.2　第 11 回

124.　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^4 2\,dx$　(2) $\displaystyle\int_3^5 x\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,dx$　(4) $\displaystyle\int_{-2}^1 2x^3\,dx$　(5) $\displaystyle\int_4^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{16}^1 x^{-\frac{5}{2}}\,dx$　(7) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)\,dx$　(8) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} (x-3)\,dx$　(9) $\displaystyle\int_2^3 (2x+3)\,dx$

(10) $\displaystyle\int_{-5}^{-2} (3x+7)\,dx$　(11) $\displaystyle\int_{-1}^2 (3-x)\,dx$　(12) $\displaystyle\int_1^3 (x^2+x)\,dx$　(13) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+x+1)\,dx$

(14) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^2+x-2)\,dx$　(15) $\displaystyle\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx$　(16) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

(17) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$　(18) $\displaystyle\int_2^6 x^{-2}\,dx$　(19) $\displaystyle\int_2^4 2x^{-3}\,dx$　(20) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x+3}$　(21) $\displaystyle\int_3^7 \frac{dx}{x-2}$

(22) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{5-x}$　(23) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2x+3}$　(24) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{7-3x}$　(25) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{(x+3)^2}$

(26) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(2x-1)^2}$　(27) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx$　(28) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$　(29) $\displaystyle\int_1^6 \sqrt[3]{3x-2}\,dx$

(30) $\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$　(31) $\displaystyle\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$　(32) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$　(33) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$

(34) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$　(35) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$　(36) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin 2x\,dx$　(37) $\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx$

(38) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$　(39) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\,dx$　(40) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi-x)\,dx$

(41) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$　(42) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$　(43) $\displaystyle\int_0^1 e^{4x-1}\,dx$　(44) $\displaystyle\int_{-1}^2 e^{3x+2}\,dx$

125.　次の三角関数の公式を用いて, 次の定積分を求めよ.

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A \qquad \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}$$

$$\sin A\sin B = -\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\cos 2x\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(-3x)\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x\cos 2x\,dx$　(8) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\cos 3x\,dx$　(9) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 3x\sin x\,dx$

2.6.3　第 12 回

126.　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 3x^2(x^3+3)^2\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\sin x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$　(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

127.　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　(4) $\displaystyle\int_1^2 xe^{2x}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x}\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$　(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^2 x^2e^x\,dx$

(9) $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$　(10) $\displaystyle\int_1^{e^2} x\log x\,dx$

2.7　面積

2.7.1　前回の復習

128.　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{\sin x}\,dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$　(6) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$　(7) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$　(10) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}\,dx$

129.　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)\,e^x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^2 (x-2)\,e^{2x}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2-1\right)e^{2x}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)e^x\,dx$　(9) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2\,dx$

(10) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2\,dx$

2.7.2　第 13 回

130.　次の曲線や直線によって囲まれる図形の面積を求めたい．それぞれの図形の面積を表す積分を用いた数式を 1 つ書け (式のみでよい.)

(1)　1 辺の長さが 2 の正方形の面積　(2)　2 辺の長さが 2, 3 の長方形の面積

(3) 等辺の長さが 1 の直角二等辺三角形の面積

(4) 3 辺の長さが $1, \sqrt{3}, 2$ の直角三角形の面積

(5) 3 辺の長さが $3, 4, 5$ の直角三角形の面積

(6) 3 辺の長さが $5, 12, 13$ の直角三角形の面積

(7) 半径が 1, 中心角が 90° のおうぎ形の面積

(8) 半径が 2 の半円の面積

(9) 半径が 3 の円の面積

(10) 半径が 1, 中心角が 135° のおうぎ形の面積

131. 次の直線や曲線によって囲まれた図形を図示し, その面積 S を積分を用いて表せ (式のみでよい).

(1) x 軸, y 軸, $y=-x+3$

(2) x 軸, y 軸, $x=2$, $y=2x+1$

(3) x 軸, y 軸, $x=3$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2$

(4) x 軸, $x=1$, $y=x^2$

(5) x 軸, $x=1$, $x=3$, $y=x^2-2x+2$

(6) x 軸, y 軸, $y=2x-4$

(7) x 軸, y 軸, $x=-1$, $y=-x-4$

(8) x 軸, $x=-3$, $x=-1$, $y=3x+1$

(9) x 軸, $x=-2$, $y=-x^2$

(10) x 軸, $x=-1$, $x=1$, $y=-2x^2-1$

(11) x 軸, $y=x^2-4x$

(12) x 軸, $y=x^2-3x+2$

(13) x 軸, $y=-x^2+5x-4$

(14) x 軸, $y=-x^2-x+2$

(15) x 軸, $y=2x^2-5x+2$

(16) $y=x+1$, $y=-x+3$, $x=3$

(17) $y=2x$, $y=-3x+10$, y 軸

(18) $y=x+3$, $y=-2x$, $x=1$

(19) $y=3x+5$, $y=-x-3$, $x=2$

(20) $y=x-4$, $y=-2x+5$, y 軸

(21) $y=x+5$, $y=x^2-x+2$

(22) $y=-4x-3$, $y=x^2+x+1$

(23) $y=-x+2$, $y=x^2-2x-4$

(24) $y=2x+1$, $y=x^2+5x-3$

(25) $y=2x+4$, $y=x^2-4$

(26) $y=x^2-2x-3$, $y=-x^2+1$

(27) $y=x^2+2x-5$, $y=-x^2-2x+1$

(28) $y=x^2-8x+6$, $y=-x^2+2x-6$

(29) $y=x^2-6x-4$, $y=-2x^2+3x+8$

(30) $y=2x^2-8x+5$, $y=-x^2+4x-4$

(31) x 軸, y 軸, $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(32) y 軸, $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

(33) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$

(34) x 軸, $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(35) x 軸, $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

132. 次の直線や曲線によって囲まれた図形の面積 S を前問の結果を利用して, 積分を用いて求めよ.

(1) x 軸, y 軸, $y=-x+3$

(2) x 軸, y 軸, $x=2$, $y=2x+1$

(3) x 軸, y 軸, $x=3$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2$

(4) x 軸, $x=1$, $y=x^2$

(5) x 軸, $x=1$, $x=3$, $y=x^2-2x+2$

(6) x 軸, y 軸, $y=2x-4$

(7) x 軸, y 軸, $x=-1$, $y=-x-4$

(8) x 軸, $x=-3$, $x=-1$, $y=3x+1$

(9) x 軸, $x=-2$, $y=-x^2$

(10) x 軸, $x=-1$, $x=1$, $y=-2x^2-1$

(11) x 軸, $y=x^2-4x$

(12) x 軸, $y=x^2-3x+2$

(13) x 軸, $y=-x^2+5x-4$

(14) x 軸, $y=-x^2-x+2$

(15) x 軸, $y=2x^2-5x+2$

(16) $y=x+1$, $y=-x+3$, $x=3$

(17) $y=2x$, $y=-3x+10$, y 軸

(18) $y=x+3$, $y=-2x$, $x=1$

(19) $y=3x+5$, $y=-x-3$, $x=2$

(20) $y=x-4$, $y=-2x+5$, y 軸

(21) $y=x+5$, $y=x^2-x+2$

(22) $y=-4x-3$, $y=x^2+x+1$

(23) $y=-x+2$, $y=x^2-2x-4$

(24) $y=2x+1$, $y=x^2+5x-3$

(25) $y=2x+4$, $y=x^2-4$

(26) $y=x^2-2x-3$, $y=-x^2+1$

(27) $y=x^2+2x-5$, $y=-x^2-2x+1$

(28) $y=x^2-8x+6$, $y=-x^2+2x-6$

(29) $y=x^2-6x-4$, $y=-2x^2+3x+8$

(30) $y=2x^2-8x+5$, $y=-x^2+4x-4$

(31) x 軸, y 軸, $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(32) y 軸, $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

(33) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$

(34) x 軸, $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(35) x 軸, $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

2.7.3　第 14 回

133.　次の直線や曲線によって囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積 V を求めるための式を求めよ (式のみでよい).

(1)　x 軸, $y = x + 2$　$(0 \leqq x \leqq 2)$

(2)　x 軸, $y = 3 - x$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

(3)　x 軸, $y = x^2 + 1$　$(0 \leqq x \leqq 2)$

(4)　x 軸, $y = x^2 - 1$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$

(5)　x 軸, $y = \sqrt{x-1}$　$(1 \leqq x \leqq 2)$

(6)　x 軸, $y = \sqrt{4 - x^2}$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$

(7)　x 軸, $y = \dfrac{1}{x}$　$(1 \leqq x \leqq 2)$

(8)　x 軸, $y = \sin x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

(9)　x 軸, $y = e^x$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

(10)　x 軸, $y = \log x$　$(1 \leqq x \leqq e)$

第 3 章

数学

3.1 偏微分

3.1.1 第 1 回

134. (x, y) 地点の標高が次の関数 $f(x, y)$ によって与えられているとする．3 地点 P $(1, 1)$, Q $(2, 1)$, R $(1, -2)$ のうち，もっとも標高が高い地点と低い地点を答えよ．

(1) $f(x, y) = x + y$ (2) $f(x, y) = xy$ (3) $f(x, y) = 2x + 3y - 1$
(4) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ (5) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ (6) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$
(7) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ (8) $f(x, y) = 2x^2 - 5xy - 3y^2$ (9) $f(x, y) = x^3 + xy - y^3$
(10) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2y^3 + 4$

135. 次の関数 $f(x, y)$ と点 P に対し，点 P が曲面 $z = f(x, y)$ 上の点かどうか答えよ．

(1) $f(x, y) = x + y$, P $(0, 0, 0)$ (2) $f(x, y) = xy$, P $(2, 3, 6)$
(3) $f(x, y) = 2x + 3y - 1$, P $(1, -1, 0)$ (4) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, P $(1, 2, 5)$
(5) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, P $(2, -1, 1)$ (6) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$, P $(1, -1, 0)$
(7) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, P $(1, -1, 0)$ (8) $f(x, y) = 2x^2 - 5xy - 3y^2$, P $(2, 1, 0)$
(9) $f(x, y) = x^3 + xy - y^3$, P $(1, 1, 1)$ (10) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2y^3 + 4$, P $(-2, 2, 8)$

136. (x, y) 地点の標高が次の関数 $f(x, y)$ によって与えられているとき，

(a) 2 地点 P $(a + h, b)$ と Q (a, b) の標高の差,
(b) 2 地点 P $(a, b + h)$ と Q (a, b) の標高の差,
(c) 2 地点 P $(a + h, b + h)$ と Q (a, b) の標高の差

の値をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x, y) = 2x - y$ (2) $f(x, y) = x + y + 3$ (3) $f(x, y) = 2x - 3y$
(4) $f(x, y) = 2x + 2y - 1$ (5) $f(x, y) = xy$ (6) $f(x, y) = x^2 + 2y$
(7) $f(x, y) = 3x - y^2$ (8) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (9) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
(10) $f(x, y) = x^3 + y^3$

137. 次の空欄を埋めよ．

2 変数の関数 $z = f(x, y)$ とその定義域の点 (a, b) を考える．$y = b$ を固定し, $\varphi(x) = f(x, b)$ とおくと, $\varphi(x)$ は x の関数となる．このとき $\varphi(x)$ の $x = a$ における微分係数

$$\varphi'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ア}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

を点 (a, b) における x に関する $\boxed{\text{イ}}$ といい, $f_x(a, b)$ と表す．同様に, $\psi(y) = f(a, y)$ を考え, その $y = b$ における微分係数

$$\psi'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\text{ウ}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

を点 (a,b) における y に関する $\boxed{\text{エ}}$ といい, $f_y(a,b)$ と表す. さらに, 点 (x,y) に $\boxed{\text{エ}}$ を対応させる関数を $\boxed{\text{オ}}$ といい, それぞれ $f_x(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ と表し, $\boxed{\text{オ}}$ を求めることを偏微分するという. 定義より, $f_x(x,y)$ は y を定数とみて, $f(x,y)$ を x で微分した導関数で, $f_y(x,y)$ は x を定数とみて, $f(x,y)$ を y で微分した導関数である.

さらに, $f(x,y)$ の $\boxed{\text{オ}}$ を偏微分したものを $\boxed{\text{カ}}$ といい, 次のように表す.

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f_x),\qquad f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(f_x),$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(f_y),\qquad f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(f_y)$$

ほとんどの場合, $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ. これらをさらに偏微分することにより, 第 3 次偏導関数, 第 4 次偏導関数等が定義され, これらを高次偏導関数という.

138.　次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ.

(1)　$f(x,y)=3xy^2$　(2)　$f(x,y)=2x^3y^4$　(3)　$f(x,y)=5x^2y^7$　(4)　$f(x,y)=4x^5y^6$

(5)　$f(x,y)=x^2+y^2$　(6)　$f(x,y)=x^2y-2xy^2$　(7)　$f(x,y)=2x^2-3xy+y^2$

(8)　$f(x,y)=x^3+xy^2-2y^3$　(9)　$f(x,y)=x^4+4x^2y^2+y^4$

(10)　$f(x,y)=x^4+3x^3y-3xy^3+y^4$　(11)　$f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$

(12)　$f(x,y)=\sqrt[3]{x+y}$　(13)　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$　(14)　$f(x,y)=\cos(x+y)$

(15)　$f(x,y)=\log(x+y)$　(16)　$f(x,y)=(x-y)^5$　(17)　$f(x,y)=\sqrt{x-y}$

(18)　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}}$　(19)　$f(x,y)=\sin(x-y)$　(20)　$f(x,y)=e^{x-y}$

3.1.2　第 2 回

139.　次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ.

(1)　$f(x,y)=2x^2y$　(2)　$f(x,y)=3x^2y^3$　(3)　$f(x,y)=7x^5y^2$　(4)　$f(x,y)=3x^4y^7$

(5)　$f(x,y)=x^3+y^4$　(6)　$f(x,y)=2x^2y+5xy^2$　(7)　$f(x,y)=3x^2-10xy+3y^2$

(8)　$f(x,y)=2x^3-x^2y+y^3$　(9)　$f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$

(10)　$f(x,y)=x^5-x^2y^3+5xy^4+y^5$　(11)　$f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2}$

(12)　$f(x,y)=\sqrt{x+y}$　(13)　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}$　(14)　$f(x,y)=\sin(x+y)$

(15)　$f(x,y)=e^{x+y}$　(16)　$f(x,y)=(y-x)^4$　(17)　$f(x,y)=\sqrt[3]{y-x}$

(18)　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$　(19)　$f(x,y)=\cos(y-x)$　(20)　$f(x,y)=\log(y-x)$

140.　次の関数 $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数を求めよ.

(1)　$f(x,y)=x^2-2xy+3y^2$　(2)　$f(x,y)=x^2+3xy+2y^2$　(3)　$f(x,y)=x^3y+xy^2$

(4)　$f(x,y)=2x^3-3xy^2+y^3$　(5)　$f(x,y)=x^3y-x^2y^2+xy^3$　(6)　$f(x,y)=(2x+3y)^5$

(7)　$f(x,y)=\log(x-y)$　(8)　$f(x,y)=\cos(x-y)$　(9)　$f(x,y)=\dfrac{y}{x}$

(10)　$f(x,y)=\sqrt{x+y}$　(11)　$f(x,y)=\log(x^2+y^2)$　(12)　$f(x,y)=e^x\cos y$

141.　次の関数 $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数を求めよ.

(1)　$f(x,y)=\log(2xy-1)$　(2)　$f(x,y)=xe^{xy}$　(3)　$f(x,y)=\dfrac{y}{xy+2}$

(4)　$f(x,y)=\sqrt{x^2y-3xy^2}$　(5)　$f(x,y)=\sin(3xy-y^2)$　(6)　$f(x,y)=\cos(x^3+2xy-y^2)$

3.2　関数の展開

3.2.1　第 3 回

142.　次の空欄を埋めよ．

(1)　関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を微分したものを，$\boxed{\text{ア}}$ といい，$f''(x)$ と表す．さらに，それを微分したものを $f'''(x)$ と表し，$\boxed{\text{イ}}$ という．一般に，$f(x)$ を n 回微分したものを第 n 次導関数といい，$f^{(n)}(x)$ と表す．

これらを用いた式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を $f(x)$ のマクローリン展開という．したがって，x の値が十分に小さければ，次のようにマクローリン展開の部分和で $f(x)$ を近似することができる．

$$f(x) \fallingdotseq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(2)　$f(x) = e^x$ のマクローリン展開を求める．$(e^x)' = \boxed{\text{ウ}}$ より，$f'(x) = \boxed{\text{エ}}$ となり，一般に $f^{(n)}(x) = \boxed{\text{オ}}$ を得る．したがって，$f^{(n)}(0) = \boxed{\text{カ}}$ となり，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

が $f(x) = e^x$ のマクローリン展開である．

(3)　$f(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求める．一般に，a, b が定数のとき，

$$(\sin(ax+b))' = a\boxed{\text{キ}} = a\sin\left(ax + b + \boxed{\text{ク}}\right)$$

が成り立つので，

$$f'(x) = (\sin x)' = \sin\left(x + \boxed{\text{ケ}}\right)$$

$$f''(x) = \sin\left(x + \boxed{\text{コ}}\right)$$

となり，一般に

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \boxed{\text{サ}}\right)$$

となることがわかる．よって，

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \boxed{\text{シ}} & n = 1, 5, 9, \ldots \\ \boxed{\text{ス}} & n = 3, 7, 11, \ldots \\ \boxed{\text{セ}} & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

となる．したがって，

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$$

が $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開である．

(4)　$f(x) = \cos x$ のマクローリン展開を求める．一般に，a, b が定数のとき，

$$(\cos(ax+b))' = -a\boxed{\text{ソ}} = a\cos\left(ax+b+\boxed{\text{タ}}\right)$$

が成り立つので，

$$f'(x) = (\cos x)' = \cos\left(x+\boxed{\text{チ}}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(x+\boxed{\text{ツ}}\right)$$

となり，一般に

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x+\boxed{\text{テ}}\right)$$

となることがわかる．よって，

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \boxed{\text{ト}} & n = 4, 8, 12, \dots \\ \boxed{\text{ナ}} & n = 2, 6, 10, \dots \\ \boxed{\text{ニ}} & \text{（上記以外）} \end{cases}$$

となる．したがって，

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$$

が $f(x) = \cos x$ のマクローリン展開である．

143.　次の関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を $f(x)$ のマクローリン展開という．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数である．

(1)　$f(x) = 2e^x$　(2)　$f(x) = e^{x+1}$　(3)　$f(x) = e^{2x}$　(4)　$f(x) = e^{-x}$

(5)　$f(x) = 3\sin x$　(6)　$f(x) = 4\cos x$　(7)　$f(x) = \sin 2x$　(8)　$f(x) = \cos 3x$

(9)　$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$　(10)　$f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$　(11)　$f(x) = \log(1-x)$

144.　次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ の近くにおける 2 次の近似多項式をマクローリン展開を利用して求めよ．また，それを利用して後の数値の近似値を求めよ．

(1)　$f(x) = \sqrt{1+x}$ と $\sqrt{1.3}$　(2)　$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ と $\sqrt[3]{1.2}$

(3)　$f(x) = e^x$ と $e^{0.1}$　(4)　$f(x) = \cos x$ と $\cos 0.02$

(5)　$f(x) = \log(1+x)$ と $\log 1.1$

145.　次の関数 $f(x)$ のマクローリン展開の 0 でない初めの 2 つの項を求めよ．

(1)　$f(x) = x\cos x$　(2)　$f(x) = \dfrac{x}{1-x}$　(3)　$f(x) = x\log(1+x)$

(4)　$f(x) = x^2e^x$　(5)　$f(x) = e^{x^2}$

3.2.2　第 4 回

146.　$f(x, y) = x^3y^2$ とする．x, y が次のように t の式で表されるとき，f を t を用いて表し，$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．ただし，a, b, h, k は定数とする．

(1)　$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$　(2)　$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$　(3)　$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-1 \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+2t \end{cases}$　(5)　$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$　(6)　$\begin{cases} x = a+ht \\ y = b+kt \end{cases}$

147.　$f(x,y)=x^3y^2$ とする．x,y が次のように t の式で表されるとき, 合成関数の微分の公式

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

を用いて, $\dfrac{df}{dt}$ を求めよ．ただし, a,b,h,k は定数とする．

(1) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{3t} \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x=a+ht \\ y=b+kt \end{cases}$

148.　次の関数 $f(x,y)$ のマクローリン展開に関して, 2 次の項まで求めよ．ここで,

$$f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)x+\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)y\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0)x^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,0)xy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0)y^2\right)+\cdots$$

を $f(x,y)$ のマクローリン展開といい, この式は $f(x,y)$ の近似式である．

(1) $f(x,y)=e^{x+y}$　(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y+1}$　(3) $f(x,y)=\sqrt{x+y+1}$

(4) $f(x,y)=e^{xy}$　(5) $f(x,y)=e^x\sin y$　(6) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+xy}$

149.　2 変数関数の 1 次近似式

$$f(a+h,b+k)\fallingdotseq f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)$$

を利用して, 次の値の近似値を求めよ．

(1) $1.98^2\times 0.97^2$　(2) $2.02^3\times 1.99^2$　(3) $1.01^4\times 3.01^3$

(4) $\dfrac{1}{1+2.01\times 2.98}$　(5) $\sqrt{3.99}\times\log 1.01$　(6) $e^{0.1}\times\sin 0.2$

3.3　2 変数関数の極値問題

3.3.1　第 5 回

150.　次の空欄を埋めよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ を考える．この関数が $x=a$ の前後で, 増加の状態から減少の状態に変化するとき, $y=f(x)$ は $x=a$ で $\boxed{\text{ア}}$ であるといい, その値 $f(a)$ を $\boxed{\text{イ}}$ という．また, この関数が $x=a$ の前後で, 減少の状態から増加の状態に変化するとき, $y=f(x)$ は $x=a$ で $\boxed{\text{ウ}}$ であるといい, その値 $f(a)$ を $\boxed{\text{エ}}$ という．$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ を合わせて, $\boxed{\text{オ}}$ という．

(2)　関数 $y=f(x)$ が増加の状態にあるとき, 各点の接線の傾きが正なので, $f'(x)\boxed{\text{カ}}0$ が成り立つ．逆に, 関数が減少の状態にあるとき, 各点の接線の傾きが負なので, $f'(x)\boxed{\text{キ}}0$ が成り立つ．このことより, この関数が $x=a$ で極値をとるとき, $f'(a)\boxed{\text{ク}}0$ が成り立つ．したがって, 極値を求めるには, まず $f'(a)\boxed{\text{ク}}0$ を満たす a を求めなければいけない．

(3)　次に, $f'(a)=0$ とする．$f'(x)$ の符号の変化がわかれば, 極値の判定ができる．それをまとめた表を $\boxed{\text{ケ}}$ という．さらに, 第 2 次導関数を用いても以下のように極値を判定できる．

- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a)$ $\boxed{\text{コ}}$ 0 ならば, $f(a)$ は極大値である.
- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a)$ $\boxed{\text{サ}}$ 0 ならば, $f(a)$ は極小値である.
- $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) = 0$ のときは, それだけでは極値であるかどうか判定できない.

151. 次の関数 $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるか否か, 判定せよ.

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ (2) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ (3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
(4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 3$ (5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ (6) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

152. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 3$ (2) $f(x) = -x^2 - 8x + 1$ (3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$
(4) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$ (5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

3.3.2 第 6 回

153. 次の空欄を埋めよ.

(1) 関数 $z = f(x, y)$ を考える. (x, y) を点 P (a, b) の近くの任意の点に対し,

$$f(a, b) > f(x, y)$$

が成り立つとき, $z = f(x, y)$ は点 P (a, b) で $\boxed{\text{ア}}$ であるといい, その値 $f(a, b)$ を $\boxed{\text{イ}}$ という.
また, (x, y) を点 P (a, b) の近くの任意の点に対し,

$$f(a, b) < f(x, y)$$

が成り立つとき, $z = f(x, y)$ は点 P (a, b) で $\boxed{\text{ウ}}$ であるといい, その値 $f(a, b)$ を $\boxed{\text{エ}}$ という.
$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ を合わせて, $\boxed{\text{オ}}$ という.

(2) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の極値の判定は以下の通りである.

I. 点 (a, b) で極値をとるとき, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ.

II. $D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)$ とおく. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つとき,

(i) $D(a, b) < 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば, $f(a, b)$ は $\boxed{\text{キ}}$ である.

(ii) $D(a, b) < 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば, $f(a, b)$ は $\boxed{\text{ク}}$ である.

(iii) $D(a, b) > 0$ ならば, $f(a, b)$ は $\boxed{\text{ケ}}$ ではない.

(iv) $D(a, b) = 0$ ならば, それだけでは $\boxed{\text{コ}}$ であるかどうか判定できない.

(3) 関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ を考える. $f(x, y) = 0$ となる点は $\boxed{\text{サ}}$ のみである. また, $f(x, y)$ $\boxed{\text{シ}}$ 0 が成り立つので, $f(x, y) = x^2 + y^2$ は点 $\boxed{\text{サ}}$ で $\boxed{\text{ス}}$ である.

(4) 関数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ を考える. まず, $f(0, 0) = \boxed{\text{セ}}$ である. $f_x = \boxed{\text{ソ}}$, $f_y = \boxed{\text{タ}}$ より, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ である. しかし, $k > 0$ が十分小さいとき,

$$f(k, 0) = \boxed{\text{チ}} > f(0, 0), \qquad f(0, k) = \boxed{\text{ツ}} < f(0, 0)$$

が成り立つので, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で $\boxed{\text{テ}}$ をとらない.

154. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2$ (2) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3$

(3)　$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 4x + 2y$　(4)　$f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$
(5)　$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 + 4y$　(6)　$f(x,y) = x^4 - 2x^2y + x^2 + y^2$

155.　次の関数の極値を求めよ．

(1)　$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$　(2)　$f(x,y) = x^3 - y^2$　(3)　$f(x,y) = x^2 + y^3$
(4)　$f(x,y) = x^3 + y^3$　(5)　$f(x,y) = x^4 + y^2$　(6)　$f(x,y) = x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4$

3.4　重積分

3.4.1　第 7 回

156.　次の空欄を埋めよ．

2 変数の関数 $z = F(x,y)$ と xy 平面の領域 D を考える．いま，$F(x,y)$ は領域 D で $F(x,y) \geqq 0$ を満たす連続な関数とする．D が

$$a \leqq x \leqq b, \quad g(x) \leqq y \leqq f(x)$$

と表されるとき，

$$a \leqq x \leqq b, \quad g(x) \leqq y \leqq f(x), \quad 0 \leqq z \leqq F(x,y)$$

で定義される立体を V とする．このとき，定積分

$$S(x) = \int_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)\,dy$$

は，V を平面 $x = x$ で切断したときの $\boxed{\text{ア}}$ を表すので，そのさらなる積分

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)\,dydx$$

は V の $\boxed{\text{イ}}$ と等しい．このような積分を $\boxed{\text{ウ}}$ 積分という．$\boxed{\text{ウ}}$ 積分に対して，1 変数関数 $f(x)$ の定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の考えを 2 変数関数 $F(x,y)$ に対して xy 平面の領域 D で同様に考えたものを

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy$$

と表し，積分領域 D 上の $\boxed{\text{エ}}$ という．そして，

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)\,dydx$$

が成り立つ．なお，積分領域 D が

$$c \leqq y \leqq d, \quad k(y) \leqq x \leqq h(y)$$

と表されるときは，累次積分を用いて，

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{k(y)}^{h(y)} F(x,y)\,dxdy$$

と計算できる．最後に $F(x,y) \geqq 0$ と限らない場合でも，同様に 2 重積分が定義され，累次積分に変換できる．

157.　次の累次積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_1^2 \int_1^3 (2x - y)\,dxdy$　(2)　$\displaystyle\int_0^2 \int_1^4 (x^2 + y^2)\,dydx$

(3)　$\displaystyle\int_1^3 \int_1^5 xy\,dxdy$　(4)　$\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 3x^2y\,dydx$

(5) $\displaystyle\int_0^2\int_y^{2y} xy^2\,dxdy$　　(6) $\displaystyle\int_0^1\int_{-x}^{2x} x^2y^2\,dydx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2y} (x-3xy)\,dxdy$　　(8) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{3x} (y^2+2xy)\,dydx$

(9) $\displaystyle\int_2^3\int_0^{y} (x+y)^2\,dxdy$　　(10) $\displaystyle\int_1^2\int_{-x}^{0} (x+y)^3\,dydx$

158.　次の累次積分の積分領域を図示せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2\int_2^3 f(x,y)\,dydx$　　(2) $\displaystyle\int_0^3\int_1^2 f(x,y)\,dxdy$

(3) $\displaystyle\int_0^2\int_{-x}^{2x} f(x,y)\,dydx$　　(4) $\displaystyle\int_1^2\int_y^{2y} f(x,y)\,dxdy$

(5) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x} f(x,y)\,dydx$　　(6) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{y} f(x,y)\,dxdy$

(7) $\displaystyle\int_0^2\int_x^{3-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dydx$　　(8) $\displaystyle\int_0^3\int_y^{2+\frac{y}{3}} f(x,y)\,dxdy$

(9) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dydx$　　(10) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$

159.　次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1) $\displaystyle I=\int_0^1\int_0^{x} f(x,y)\,dydx$　　(2) $\displaystyle I=\int_0^1\int_0^{y} f(x,y)\,dxdy$

(3) $\displaystyle I=\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dydx$　　(4) $\displaystyle I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$

(5) $\displaystyle I=\int_0^2\int_{-x}^{2x} f(x,y)\,dydx$　　(6) $\displaystyle I=\int_0^2\int_x^{3-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dydx$

(7) $\displaystyle I=\int_0^3\int_y^{2+\frac{y}{3}} f(x,y)\,dxdy$　　(8) $\displaystyle I=\int_1^2\int_y^{2y} f(x,y)\,dxdy$

160.　$x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ が偏微分可能で, その偏導関数が連続のとき, 2 重積分に関して次の等式が成り立つ.

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy=\iint_D F(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\,dudv$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}=x_uy_v-x_vy_u$$

ここで, $J(u,v)$ をヤコビ行列式といい, $J(u,v)\neq 0$ とする. この公式を用いて, 次の領域 D の 2 重積分 I を計算せよ.

(1) $\displaystyle I=\iint_D \frac{e^{x-y}}{1+(x+y)^2}\,dxdy$　　$D: -1\leqq x+y\leqq 1, -1\leqq x-y\leqq 1$

(2) $\displaystyle I=\iint_D \cos\left(\frac{x}{2}+y\right)\log(2x+y+1)\,dxdy$　　$D: 0\leqq x+2y\leqq \pi, 1\leqq 2x+y+1\leqq e$

(3) $\displaystyle I=\iint_D (x-y)^2e^{(x+y)^2}\,dxdy$　　$D: 0\leqq x+y\leqq 1, 0\leqq x\leqq x+y$

(4) $\displaystyle I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$　　$D: 0\leqq x^2+y^2\leqq a^2, a$ は正の定数

(5) $\displaystyle I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$　　$D: 0\leqq \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1, a, b$ は正の定数

(6) $\displaystyle I=\iint_D x\,dxdy$　　$D: x^2+y^2\leqq x$

(7)　$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$　　$D: x^2+y^2 \leqq 2ax, a$ は正の定数

3.4.2　第 8 回

161.　次の関数 $f(x,y)$ と領域 D に対し, 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(1)　$f(x,y) = x+y,$　　$D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$
(2)　$f(x,y) = xy,$　　$D: 1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3$
(3)　$f(x,y) = x^2+y^2,$　　$D: 0 \leqq y \leqq 3,\ 0 \leqq x \leqq 3$
(4)　$f(x,y) = 3x^2y+3xy^2,$　　$D: 2 \leqq y \leqq 3,\ 0 \leqq x \leqq 1$
(5)　$f(x,y) = 2x-3y,$　　$D: 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y$
(6)　$f(x,y) = (x+y)^2,$　　$D: 0 \leqq y \leqq 2,\ y \leqq x \leqq 2y$
(7)　$f(x,y) = xy^3,$　　$D: 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 1$
(8)　$f(x,y) = x-y,$　　$D: 0 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 3x$
(9)　$f(x,y) = 1,$　　$D: 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}$
(10)　$f(x,y) = 1,$　　$D: 1 \leqq y \leqq 3,\ \sqrt{y-1} \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$

162.　次の不等式で表される空間の領域 D の体積 V を求めよ.

(1)　$0 \leqq x \leqq 3, 0 \leqq y \leqq 2, 0 \leqq z \leqq x+y$
(2)　$1 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq 3, 0 \leqq z \leqq 2x+y^2$
(3)　$0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 2x, 0 \leqq z \leqq xy+y$
(4)　$0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq 2-x, 0 \leqq z \leqq 2x+y$
(5)　$1 \leqq y \leqq 2, 0 \leqq x \leqq y, 0 \leqq z \leqq x^2+2xy$
(6)　$0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq y^2, 0 \leqq z \leqq xy+1$
(7)　$0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq 4x-x^2, 0 \leqq z \leqq 1$
(8)　$0 \leqq x \leqq 3, 0 \leqq y \leqq \sqrt{3-x}, 0 \leqq z \leqq y$
(9)　$1 \leqq y \leqq 3, \sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{2y}, 0 \leqq z \leqq 2$
(10)　$0 \leqq y \leqq 4, 1 \leqq x \leqq 5-y, 0 \leqq z \leqq 4$

3.5　行列

3.5.1　第 9 回

163.　次の空欄を埋めよ.

行の数が m, 列の数が n の行列を $\boxed{\text{ア}}$ 行列という. 特に, $m=n$ のとき, m 次 $\boxed{\text{イ}}$ 行列という.

A を $m\times n$ 行列, B を $k\times l$ 行列とする. 実数 a に対し, A の a 倍は, A の各成分を a 倍することによって計算できる. また, A, B の行と列の数がそれぞれ等しいとき, すなわち, $\boxed{\text{ウ}}$ のとき, A, B の対応する成分の和, 差を計算することにより, 行列の和 $A+B$, 行列の差 $A-B$ を 求めることができる.

積 AB については, A の列の数と B の行の数が等しいときのみ, 計算可能である. つまり, $m\times n$ 行列 A と $k\times l$ 行列 B に対し, $\boxed{\text{エ}}$ のときに限り, 積 AB が計算可能で, $\boxed{\text{オ}}$ 行列になる. このとき, AB の ij 成分は, A の i 行目からなるベクトルと, B の j 列目からなるベクトルとの内積に等しい.

164.　次を計算せよ.

(1)　$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(3)　$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(4)　$4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(6) $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $2\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(8) $3\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(9) $2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(12) $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

165.　次の行列 A, B に対し，積 AB が計算可能か判定せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(8) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(9) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(10) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

166.　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，積の計算が可能な 2 つ行列の組み合わせをすべて答えよ.

167.　次の行列 A, B, C に対し, $AB + C$ が計算可能か調べよ. 可能なら計算し, 可能でない場合はその理由を述べよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(8) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(9) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

168. 次の正方行列 A, B に対し, 積 AB を計算せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(9) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

(10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.5.2 第 10 回

169. 次の空欄を埋めよ.

A を正方行列とする.

$$AB = BA = E \qquad (E \text{ は単位行列})$$

を満たす行列 B を A の $\boxed{\text{ア}}$ といい, A^{-1} と表す. 注意しなければいけないのは, $\boxed{\text{ア}}$ がいつでも存在するとは限らない点である. A の $\boxed{\text{ア}}$ A^{-1} が存在するとき, A を $\boxed{\text{イ}}$ という.

A を 2 次の正方行列とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表したとき, A が $\boxed{\text{イ}}$ となるための必要十分条件は

$$ad - bc \neq 0$$

である. さらに, このとき,

$$A^{-1} = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ. ここで, $ad - bc$ を $|A|$ と表し, A の $\boxed{\text{エ}}$ という.

最後に, 連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

を考える. この連立方程式は行列を用いて,

$$\boxed{\text{オ}}$$

と表すことができる. 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $\boxed{\text{カ}}$ という. また, A が正則行列のときは,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

を計算することにより, 連立方程式の解を求めることができる.

170.　次の行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し, 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を連立方程式の形で表せ. ただし, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする.

(1)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(2)　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(3)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -8 \\ 23 \end{pmatrix}$

(5)　$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

(6)　$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(7)　$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(8)　$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

(9)　$A=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \end{pmatrix}$

(10)　$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$

171.　次の連立方程式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表すとき, 係数行列 A と定数項のベクトル $\boldsymbol{b}$ を答えよ. ただし, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする.

(1)　$\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ -6x+13y=11 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} 3x-4y=12 \\ -4x-5y=-9 \end{cases}$

(3)　$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x-3y=3 \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

(5)　$\begin{cases} 5x+2y=7 \\ -x+4y=-3 \end{cases}$

(6)　$\begin{cases} -4x-3y=-14 \\ 3x+2y=28 \end{cases}$

(7)　$\begin{cases} -x+y=-2 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$

(8)　$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

(9)　$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=6 \end{cases}$

(10)　$\begin{cases} 3x+4y=-8 \\ 2x-3y=23 \end{cases}$

172.　次の行列 A, B について, B が A の逆行列のとき, a, b の値を求めよ.

(1)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & a & -5 \\ -1 & 8 & b \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = -\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -8 & a & 4 \\ -11 & 4 & b \end{pmatrix}$

(3)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -7 \\ -1 & -1 & b \end{pmatrix}$

(4)　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{28}\begin{pmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 1 & a & 5 \\ -7 & 7 & b \end{pmatrix}$

(5)　$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & 11 & -13 \\ 0 & a & 18 \\ 5 & 7 & b \end{pmatrix}$

(6)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & 1 & -6 \\ -2 & a & 0 \\ -12 & -3 & b \end{pmatrix}$

173.　次の 2 次の正方行列 A の逆行列を求めよ.

(1)　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　(2)　$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$　(3)　$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$　(4)　$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(5)　$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$　(6)　$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$　(7)　$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(8)　$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(9)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$　(10)　$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

174.　係数行列の逆行列を利用して, 次の連立方程式の解を求めよ.

(1)　$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$　(2)　$\begin{cases} 5x - 4y = 14 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$　(3)　$\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} 7x - 4y = -1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$　(5)　$\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$　(6)　$\begin{cases} 8x + 5y = -18 \\ 5x + 3y = -11 \end{cases}$

(7)　$\begin{cases} 4x + 5y = 22 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$　(8)　$\begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 2x - 3y = 23 \end{cases}$　(9)　$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

(10)　$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 2x - 5y = -7 \end{cases}$

175.　行列 A を 3 次の正方行列とする. 次の 3 次の基本行列 M に対して, 積 MA に関する説明として適切なものを次の (a)〜(c) から 1 つ選び, 空欄を埋めよ.

(a)　MA は, A の $\boxed{\text{ア}}$ 行目を $\boxed{\text{イ}}$ 倍した行列である.

(b)　MA は, A の $\boxed{\text{ウ}}$ 行目と $\boxed{\text{エ}}$ 行目を入れ替えた行列である.

(c)　MA は, A の $\boxed{\text{オ}}$ 行目の $\boxed{\text{カ}}$ 倍を $\boxed{\text{キ}}$ 行目に加えた行列である.

(1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

176.　次の 2 次の正方行列 A が正則か否か答えよ．また, その理由も答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$　(7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$　(8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(9) $A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$　(10) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

3.6　行列式

3.6.1　第 11 回

177.　次の空欄を埋めよ．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式 $|A|$ の値は

$$|A| = \boxed{\text{ア}}$$

で求めることができる．同様に, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ のとき, サラスの公式

$$|A| = \boxed{\text{イ}}$$

を用いて, 行列式の値を求めることができる．

行列式に関しては次の性質が成り立つ．

· $|A| \neq 0$ のとき, A は正則行列で $\boxed{\text{ウ}}$ をもつ．逆も正しい．

· 行列式のある行または列を k 倍すると, 行列式の値は $\boxed{\text{エ}}$ になる．

· 行列式のある 2 つの行または列を入れ替えると, 行列式の値は $\boxed{\text{オ}}$ になる．

· 行列式のある行または列に, 他の行または列の k 倍を加えても, 行列式の値は $\boxed{\text{カ}}$ ．

178.　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$　(10) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$

179.　次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 6 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ (10) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

180. 次の方程式を解け.

(1) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & x-4 \end{vmatrix} = 0$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ x & 9 \end{vmatrix} = 0$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ x+1 & 8 \end{vmatrix} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ (5) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 6 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ (6) $\begin{vmatrix} x-1 & 9 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

181. 次の行列の行列式の値が 0 となるとき, a の値を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & a \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3.6.2 第 12 回

182. 下の式変形は行列式の性質を用いて行列式を計算したものである. この式変形が正しいか調べよ. 正しくない場合は, (ア)〜(キ) の中から正しくない式変形の箇所を選べ.

(1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 \\ -5 & -8 & 10 \end{vmatrix} \overset{(ア)}{=} 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & -8 & 10 \end{vmatrix} \overset{(イ)}{=} 3\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -5 & -4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ウ)}{=} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & 10 \end{vmatrix} \overset{(エ)}{=} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(オ)}{=} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \overset{(カ)}{=} 6\cdot\{-1\cdot 1\cdot(-2)\} \overset{(キ)}{=} 12$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{(ア)}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{(イ)}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ウ)}{=} 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \overset{(エ)}{=} 2\cdot 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(オ)}{=} 6\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \overset{(カ)}{=} 6\cdot\{1\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-3)\} \overset{(キ)}{=} 66$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 7 & -6 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{(ア)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 9 & -6 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{(イ)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -8 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(ウ)}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{(エ)}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(オ)}{=} -2\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(カ)}{=} -10\cdot\{1\cdot(-7)\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot(-1)\} \overset{(キ)}{=} 90$$

3.7　固有値と固有ベクトル

3.7.1　第 13 回

183.　次の空欄を埋めよ.

A を正方行列とする. 定数 λ と零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

が成り立つとき, λ を A の $\boxed{\text{ア}}$, $\boldsymbol{x}$ を A の $\boxed{\text{イ}}$ という. A の $\boxed{\text{ア}}$ を求めるには, $\boxed{\text{ウ}}$

$$|A - \lambda E| = 0$$

を解けばよい. ここで, E は単位行列を表し, 左辺は行列 $A - \lambda E$ の行列式である. また, $\boxed{\text{ア}}$ λ に対する $\boxed{\text{イ}}$ は, 連立方程式

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ である.

A を 2 次の正方行列とし, その固有値を α, β, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とする. $\alpha \neq \beta$ のとき, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は平行ではなく, 2 つの固有ベクトルを列とする行列を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$ とおくと P は正則行列で, 逆行列 P^{-1} を持つ. よって,

$$P^{-1}AP = P^{-1}A\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} A\boldsymbol{u} & A\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{u} & \beta\boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となり, 対角行列が得られる. このような行列 P が存在するとき, 行列 A は $\boxed{\text{エ}}$ であるといい, この操作を行列 A を対角化するという.

184.　次のベクトル $\boldsymbol{x}$ が行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルか否か, 判定せよ.

(1)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　(3)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(4)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$　(6)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(7)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$　(8)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

185. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

3.7.2 第 14 回

186. 次の行列が対角化可能かどうか調べよ．対角化可能ならば，対角化する行列 P とその行列 P によって対角化された行列 $P^{-1}AP$ を 1 つずつ答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

第 4 章

応用解析

4.1 ベクトル関数の微分・積分, スカラー場の勾配

4.1.1 第 1 回

187. 次の空欄を埋めよ.

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{i} + A_y(t)\boldsymbol{j} + A_z(t)\boldsymbol{k}$$

をベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の基本ベクトル表示とする. このとき, ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の導関数 $\boldsymbol{A}'(t) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ は

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boxed{\text{ア}}\,\boldsymbol{i} + \boxed{\text{イ}}\,\boldsymbol{j} + \boxed{\text{ウ}}\,\boldsymbol{k}$$

と表される. また, $\boldsymbol{A}(t)$ の不定積分 $\displaystyle\int \boldsymbol{A}(t)\,dt$ は

$$\int \boldsymbol{A}(t)\,dt = \left(\boxed{\text{エ}}\right)\boldsymbol{i} + \left(\boxed{\text{オ}}\right)\boldsymbol{j} + \left(\boxed{\text{カ}}\right)\boldsymbol{k}$$

と表される. なお, 定積分に関しても同様である.

188. 次のベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の導関数 $\boldsymbol{A}'(t)$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{A}(t) = 2t^3\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + 4t^4\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{A}(t) = (t^3+3t)\boldsymbol{i} + (t^4-4t^3)\boldsymbol{j} + (t^2+1)\boldsymbol{k}$

(3) $\boldsymbol{A}(t) = (t+1)^2\boldsymbol{i} + (t^2+1)\boldsymbol{j} + (3t-2)^2\boldsymbol{k}$

(4) $\boldsymbol{A}(t) = (3t+2)\boldsymbol{i} + (t^3+2t^2)\boldsymbol{j} + (2t+3)^3\boldsymbol{k}$

(5) $\boldsymbol{A}(t) = \dfrac{1}{t}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{t-1}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{2t+1}\boldsymbol{k}$

(6) $\boldsymbol{A}(t) = (2t+3)^3\boldsymbol{i} + (3t-2)^3\boldsymbol{j} + (4t+3)^4\boldsymbol{k}$

(7) $\boldsymbol{A}(t) = \sqrt{t}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\boldsymbol{j} + \sqrt{2t-1}\boldsymbol{k}$

(8) $\boldsymbol{A}(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{(t-2)^3}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{(2t+1)^2}\boldsymbol{k}$

(9) $\boldsymbol{A}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j} + \sin 2t\boldsymbol{k}$

(10) $\boldsymbol{A}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + \tan^2 t\boldsymbol{k}$

(11) $\boldsymbol{A}(t) = e^t\boldsymbol{i} + e^{2t}\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$

(12) $\boldsymbol{A}(t) = (\log t)\boldsymbol{i} + \log(t+1)\boldsymbol{j} + \log(2t-1)\boldsymbol{k}$

(13) $\boldsymbol{A}(t) = e^{3t}\boldsymbol{i} + (\log t)^2\boldsymbol{j} + \log\dfrac{e}{2t}\boldsymbol{k}$

(14) $\boldsymbol{A}(t) = 10^t\boldsymbol{i} + 10^{-t}\boldsymbol{j} + 2^{2t}\boldsymbol{k}$

189. 次の不定積分・定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (2t\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5t^2\boldsymbol{k})dt$

(2) $\displaystyle\int (3\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j} + 8t\boldsymbol{k})dt$

(3) $\displaystyle\int ((2t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j} + (t^2-4t)\boldsymbol{k})dt$

(4) $\displaystyle\int ((3t+1)^3\boldsymbol{i} + (2t+3)^4\boldsymbol{j} + (-t+3)^5\boldsymbol{k})dt$

(5) $\displaystyle\int ((t+1)^2\boldsymbol{i} + (t+2)^3\boldsymbol{j} + (t+3)^4\boldsymbol{k})dt$

(6) $\displaystyle\int e^{-t}\boldsymbol{i} + \sin 3t\boldsymbol{j} + \tan t\boldsymbol{k})dt$

(7) $\displaystyle\int_0^2 (t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k})\,dt$

(8) $\displaystyle\int_1^2 \left\{(2t-1)\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + (t^3-2)\boldsymbol{k}\right\}\,dt$

(9) $\displaystyle\int_1^4 (e\boldsymbol{i} - t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k})\,dt$　(10) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2t-1}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3t-2}\boldsymbol{k}\right) dt$

(11) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{t^2}\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{k}\right) dt$　(12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin t\boldsymbol{i} + \cos 3t\boldsymbol{j} + \frac{1}{\cos^2 t}\boldsymbol{k}\right) dt$

(13) $\displaystyle\int_0^1 \left(e^t\boldsymbol{i} + e^{2t}\boldsymbol{j} + e^{3t}\boldsymbol{k}\right) dt$　(14) $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{2t}\boldsymbol{i} + \log t\boldsymbol{j} + \frac{2t-1}{2e^2}\boldsymbol{k}\right) dt$

4.1.2　第 2 回

190.　次の空欄を埋めよ.

空間内の領域を考え, この領域の各点 P (x, y, z) に対し, スカラー $f(x, y, z)$ が対応しているとする. このとき, 領域と関数 $f(x, y, z)$ を合わせた概念を $\boxed{\text{ア}}$ という. また, 領域の各点 P (x, y, z) に対し, ベクトル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ が対応しているとき, 領域とベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を合わせた概念を $\boxed{\text{イ}}$ という.

$f(x, y, z)$ を $\boxed{\text{ア}}$ とする. f に対し,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

を f の $\boxed{\text{ウ}}$ という. ここで, ∇ はナブラと呼ぶ. また, 単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ が与えられたとき, 点 P における $\boxed{\text{ウ}}$ $(\nabla f)_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{u}$ との内積 $(\nabla f)_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{u}$ によって, 点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ 方向への $\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{df}{du}$ を求めることができる. この値は, 点 P における $\boxed{\text{ウ}}$ が $\boldsymbol{u}$ 方向へどの程度傾いているかを表す量である.

191.　次のスカラー場 $f = f(x, y, z)$ の勾配 $\operatorname{grad} f$ を求めよ.

(1) $f = x^2 + y^2 + z^2$　(2) $f = xy + yz + zx$　(3) $f = xyz$　(4) $f = x^2y^4z^3 + 1$
(5) $f = x^2y + yz^3$　(6) $f = x^3y^2 + xy^3z^2$　(7) $f = (x + y + z)^3$　(8) $f = (2x + 3y + 4z)^2$
(9) $f = \sin(x + y + z)$　(10) $f = \log(x + y + z)$　(11) $f = \log(2x - y + 3z)$
(12) $f = e^{xyz}$　(13) $f = e^x \cos yz$　(14) $f = 10^{xyz}$

192.　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$ とする. 等式 $\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ を示せ.

193.　次のスカラー場 $f = f(x, y, z)$ について, 点 P $(2, -4, 3)$ における, 単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ 方向への方向微分係数 $\dfrac{df}{du}$ を求めよ.

(1) $f(x, y, z) = x + y + z$　(2) $f(x, y, z) = 2x + 3y - 4z$　(3) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$
(4) $f(x, y, z) = x^3 - yz^2$　(5) $f(x, y, z) = xyz$　(6) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$
(7) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$　(8) $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z)^3$　(9) $f(x, y, z) = x^3y^2z$
(10) $f(x, y, z) = xy^2 - \sqrt{y^2 + z^2}$

194.　次のスカラー場 $f = f(x, y, z)$ について, 点 P $(1, 3, -2)$ における, 単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{7}(2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$ 方向への方向微分係数 $\dfrac{df}{du}$ を求めよ.

(1) $f(x, y, z) = x + y + z$　(2) $f(x, y, z) = 2x + 3y - 4z$　(3) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$
(4) $f(x, y, z) = x^3 - yz^2$　(5) $f(x, y, z) = xyz$　(6) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$
(7) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$　(8) $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z)^3$　(9) $f(x, y, z) = x^3y^2z$
(10) $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$

4.2 ベクトル場と発散・回転, 線積分と面積分 (1)

4.2.1 第 3 回

195. 次の空欄を埋めよ.

$\boldsymbol{A}$ をベクトル場とする.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

を $\boldsymbol{A}$ の $\boxed{\text{ア}}$ といい,

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を $\boldsymbol{A}$ の $\boxed{\text{イ}}$ という. ここで, 第 1 行の右辺は 3 次の行列式である. スカラー場 f に対し,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

を f の $\boxed{\text{ウ}}$ という.

196. 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して, 発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{A} = 3x\,\boldsymbol{i} + 5y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$　(2) $\boldsymbol{A} = xy\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + zx\,\boldsymbol{k}$　(3) $\boldsymbol{A} = yz\,\boldsymbol{i} + xz\,\boldsymbol{j} + yz\,\boldsymbol{k}$
(4) $\boldsymbol{A} = (x+y)\,\boldsymbol{i} + (y+z)\,\boldsymbol{j} + (z+x)\,\boldsymbol{k}$　(5) $\boldsymbol{A} = x^2y^3z\,\boldsymbol{i} + xy^2z^3\,\boldsymbol{j} + x^3yz^2\,\boldsymbol{k}$
(6) $\boldsymbol{A} = \cos xyz\,\boldsymbol{i} + \cos xyz\,\boldsymbol{j} + \cos xyz\,\boldsymbol{k}$　(7) $\boldsymbol{A} = (xy+z)^3\,\boldsymbol{i} + (yz+x)^2\,\boldsymbol{j} + (xz+y)^4\,\boldsymbol{k}$
(8) $\boldsymbol{A} = xy^2\,\boldsymbol{i} + \log(y^2+z^2)\,\boldsymbol{j} + \sin xz\,\boldsymbol{k}$　(9) $\boldsymbol{A} = (2x-3z)^4\,\boldsymbol{i} + (3y-2x)^3\,\boldsymbol{j} + (2y-z)^5\,\boldsymbol{k}$
(10) $\boldsymbol{A} = \log\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{i} + \log\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{j} + \log\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{k}$

197. 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して, 回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{A} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-z)\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}$　(2) $\boldsymbol{A} = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$
(3) $\boldsymbol{A} = (xy+z)\boldsymbol{i} + (yz+x)\boldsymbol{j} + (xz+y)\boldsymbol{k}$　(4) $\boldsymbol{A} = (y^2+z^2)\boldsymbol{i} + (z^2+x^2)\boldsymbol{j} + (x^2+y^2)\boldsymbol{k}$
(5) $\boldsymbol{A} = xyz\boldsymbol{i} - y^2z^3\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k}$　(6) $\boldsymbol{A} = x^2y^3z\boldsymbol{i} + x^3yz^2\boldsymbol{j} + xy^2z^3\boldsymbol{k}$
(7) $\boldsymbol{A} = e^{yz}\boldsymbol{i} + e^{zx}\boldsymbol{j} + e^{xy}\boldsymbol{k}$　(8) $\boldsymbol{A} = x^2y\boldsymbol{i} + \log(3y-z)\boldsymbol{j} - \log(3y-z)\boldsymbol{k}$
(9) $\boldsymbol{A} = (\cos y + \cos z)\boldsymbol{i} + (\cos z + \cos x)\boldsymbol{j} + (\cos x + \cos y)\boldsymbol{k}$

198. 次のスカラー場 f に対して, ラプラシアン Δf を求めよ.

(1) $f = x^4y^3z^2$　(2) $f = x^3y^4z^3$　(3) $f = 2xyz^2 - 3x^2yz + 4xy^2z$
(4) $f = 3x^3y - xy^3 + xyz^2$　(5) $f = (2x+3y+4z)^3$　(6) $f = \sqrt{xyz}$

4.2.2 第 4 回

199. 次の空欄を埋めよ.

空間内の曲線 $C : \boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$　$(a \leqq t \leqq b)$ を考える. このとき, ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は曲線に接する, すなわち接ベクトルである. また

$$ds = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$

を $\boxed{\text{ア}}$ という.

$$s = \int_a^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$

は $t=a$ から $t=t$ までの曲線の長さを表し, これを $\boxed{\text{イ}}$ という. また,

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|}$$

を $\boxed{\text{ウ}}$ という.

スカラー場 $f=f(x,y,z)$ に対し,

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$

を f の $\boxed{\text{エ}}$ という. 同様に, ベクトル場 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$ に対し,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \int_a^b \boldsymbol{A}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

を $\boldsymbol{A}$ の $\boxed{\text{エ}}$ という.

200.　次の曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ の点 $t=0$ から $t=t$ までの弧長 s と接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を求めよ.

(1)　$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k}$　(2)　$\boldsymbol{r}(t)=2t^3\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k}$　(3)　$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+(t-1)^2\boldsymbol{j}+\dfrac{8}{3}\sqrt{t^3}\boldsymbol{k}$

(4)　$\boldsymbol{r}(t)=\sqrt{2}(t+1)\boldsymbol{i}+\log(t+1)\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}(t+1)^2\boldsymbol{k}$

(5)　$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2e^t\boldsymbol{j}+e^{2t}\boldsymbol{k}$

201.　次のスカラー場 $f=f(x,y,z)$ に対して, 線積分 $\displaystyle\int_C f\,ds$ を求めよ. ただし, C は原点 O から点 A $(3,3,2)$ に至る線分, $\boldsymbol{r}(t)=3t\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$　$(0\leqq t\leqq 1)$ とする.

(1)　$f=x+y$　(2)　$f=y^2+xz$　(3)　$f=(x+y)(y+z)$

(4)　$f=2x-yz$　(5)　$f=xyz$

202.　曲線 C をつるまき線

$$C:\ \boldsymbol{r}(t)=2\cos t\,\boldsymbol{i}+2\sin t\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}\quad(0\leqq t\leqq\pi)$$

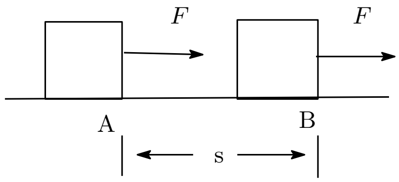
とする. 以下の問に答えよ.

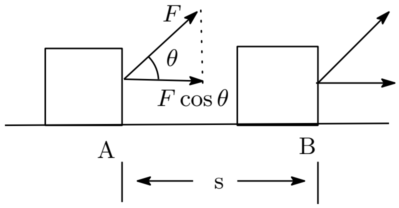
(1)　点 $t=0$ から $t=\pi$ までの弧長 s と接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を求めよ.

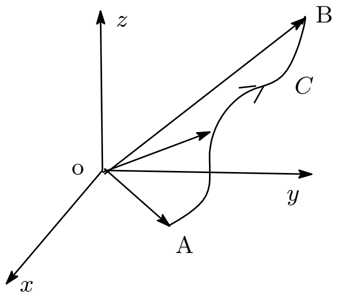
(2)　スカラー場 $f(x,y,z)=3x+y$ に対して線積分 $\displaystyle\int_C f\,ds$ を求めよ.

(3)　ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}$ に対して, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ を求めよ.

203.　物体が一定の力 F [N] の作用を受けて距離 s [m] だけ移動するとき, $W=Fs$　$[J]$







を力 F のなす仕事という．同様に物体が一定の力 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けて一定の方向に $\boldsymbol{s}$ だけ変位するとする．$|\boldsymbol{F}| = F$, $|\boldsymbol{s}| = s$ とし，角度 θ を $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{s}$ のなす角とするとき，$W = (F\cos\theta)s = Fs\cos\theta$ を力 F のなす仕事という．これは

$$W = Fs\cos\theta = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

と内積 (スカラー積) で表される．一般には力も一定ではなく，変位も直線的ではないので，図のように点 A を始点，点 B を終点とする曲線を

$$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

とし，A から B までを微小な折れ線で結び，その微小な変位を $\Delta\boldsymbol{r}_i$，微小な仕事を ΔW_i とすると，A から B までの仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \\ &= \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt \qquad \cdots(ア) \\ &= \int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,ds \end{aligned}$$

となる．

(1)　曲線 C を原点 O から点 $A(1,1,1)$ に至る線分，$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$　$(0 \leqq t \leqq 1)$ とする．力 $\boldsymbol{F} = (x^2+2y)\boldsymbol{i} + 7yz\boldsymbol{j} - 8x^2z\boldsymbol{k}$ に対して，O から A までの仕事を W としたとき，(ア) を用いて W を表す式を具体的に記せ．

(2)　W [J] の値を求めよ．

4.3　線積分と面積分 (2)，複素数と複素数平面

4.3.1　第 5 回

204.　次の空欄を埋めよ．

点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が 2 変数 u, v の関数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$$

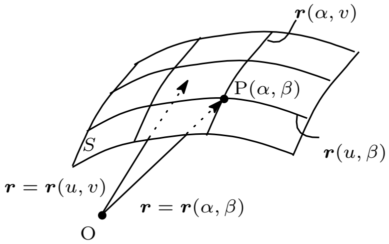
であるとき，uv 平面の領域 D に対して $\boldsymbol{r}$ は曲面 S を描く．上式を曲面 S のパラメーター表示という．例えば，曲面 $z = f(x,y)$ の u, v をパラメーターとする表示は，$x = u$, $y = v$ とおくと $z = f(u,v)$ より，

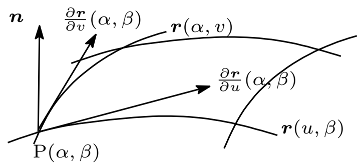
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \boxed{\;ア\;}$$

によって与えられる．

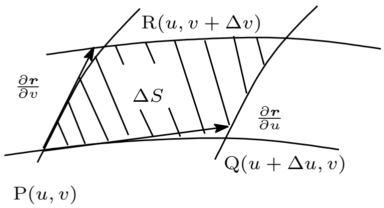
曲面 S 上の点 P でパラメーター (α, β) をもつ点を P (α,β) で表し，(α,β) を点 P の曲線座標という．今，$v = \beta$ を固定し，u だけを変化させるとき，$\boldsymbol{r}(u,\beta)$ は点 P (α,β) を通る曲線になる．この曲線を点 P における $\boxed{\;イ\;}$ といい，同様に $u = \alpha$ を固定し，v だけを変化させる曲線 $\boldsymbol{r}(\alpha, v)$ を点 P にお

ける $\boxed{\text{ウ}}$ と呼ぶ. $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(\alpha,\beta)$ は点 P における $\boxed{\text{イ}}$ への $\boxed{\text{エ}}$ を与え, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(\alpha,\beta)$ は点 P における $\boxed{\text{ウ}}$ への $\boxed{\text{エ}}$ を与える.





曲面 S 上の点 P (u,v) において $\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ の両方に垂直なベクトル $\boxed{\text{オ}}$ を点 P における法線ベクトルといい, $\boldsymbol{n}=\boxed{\text{カ}}$ を点 P における単位法線ベクトルという.



図の曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ の微小部分の面積 ΔS について,

$$\Delta S \fallingdotseq \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}\right| \fallingdotseq \boxed{\text{キ}}\,\Delta u \Delta v$$

となる. これより, uv 平面の領域 D に対応する曲面の部分の面積 (曲面積) S は, 2 重積分

$$\iint_D \boxed{\text{キ}}\, du dv$$

によって与えられる.

$$dS = \boxed{\text{キ}}\, du dv$$

を曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ の面積素 (面素) という.

曲面が $z=f(x,y)$ によって与えられたとき, そのパラメーター表示は

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\boxed{\text{ア}}$$

によって与えられる. これより, 点 P (x,y) における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は,

$$\boldsymbol{n}=\boxed{\text{ク}}$$

によって与えられ, xy 平面の領域 D に対応する曲面積 S は

$$S=\iint_D \boxed{\text{ケ}}\, dx dy$$

となる.

205. 次の空欄を埋めよ.

曲面 $S : \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ とその上で定義されたスカラー場 $F(x,y,z)$ に対して,

$$\int_S F\,dS = \iint_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| du dv$$

をスカラー場 F の曲面 S の上での面積分という. D は曲面 S に対応する uv 平面の領域である. 特に, 曲面 S が $z=f(x,y)$ によって与えられたとき, スカラー場 F の曲面 S の上での面積分は,

$$\int_S F\,dS = \iint_D \boxed{\text{ア}}\, du dv$$

となる.

曲面 S の各点で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を立体の外側へ向いたものを選ぶことにする. 今 S の各点 P にベクトル $A(\mathrm{P})$ が対応しているとする. つまり, A は S 上で定義されたベクトル場とする. このとき, A と $\boldsymbol{n}$ の内積 $A \cdot \boldsymbol{n}$ は S 上のスカラー場を与える. このスカラー場 $A \cdot \boldsymbol{n}$ の S の上での面積分

$$\int_S A \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

をベクトル場 A の曲面 S の上での面積分という.

206.　曲面 $S: x+y+z=1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ に対して, 以下の問に答えよ.

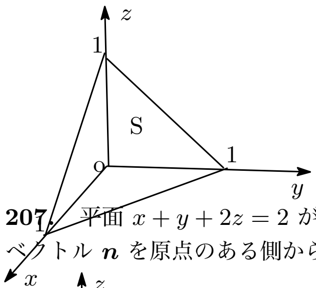
(1)　曲面 S のパラメーター表示および面素 dS を求めよ.

(2)　S の法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を原点のある側から他の側に向かってとることにするとき, $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

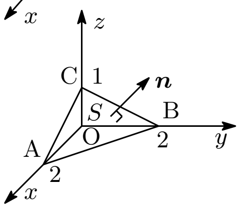
(3)　面積分 $\displaystyle\int_S dS$ を求めよ.

(4)　スカラー場 $g(x,y,z) = xy + z^2$ に対して, 面積分 $\displaystyle\int_S g\, dS$ を求めよ.

(5)　ベクトル場 $\boldsymbol{A} = z\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$ に対して, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.



207.　平面 $x+y+2z=2$ が座標軸と交わる点を頂点とする三角形の領域を S とする. S の法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を原点のある側から他の側に向かってとるとき, 以下の問に答えよ.



(1)　S のパラメーター表示, 面素 dS および法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ をそれぞれ求めよ.

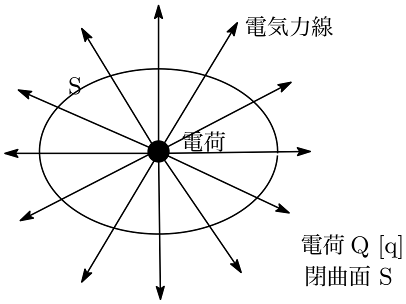
(2)　面積分 $\displaystyle\int_S dS$ を求めよ.

(3)　スカラー場 g を $g(x,y,z) = x + y - 2z$ とするとき, 面積分 $\displaystyle\int_S g\, dS$ を求めよ.

(4)　ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(x,y,z) = y\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とするとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.

208. 電磁気学において, 次のガウスの法則が成り立つことが知られている.
ガウスの法則：

「電荷を包む任意の閉曲面を貫く電気力線の本数」＝「電荷から出発した電気力線の本数」



今, 電荷 Q [C] から出発する電気力線の本数 N を仮想的に $N = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ とする. ここで, $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ [$\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2$] となる定数とする. そしてこの N と電界 E との間には, 閉曲面の面積を S としたとき,

$$N = ES$$

という関係が成り立つことが知られている. ここで, 電界 E は面積 S の面に垂直となっている場合を考えている.

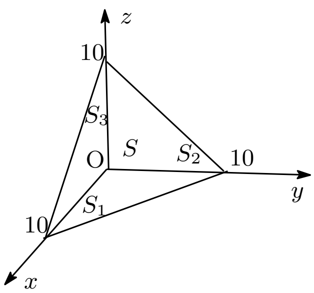
電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ は閉曲面 S の微小平面 dS に垂直とは限らないので, 電界 E の dS に垂直な成分 $E_n = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は閉曲面の外側に向きをとった法線ベクトル) を考えることにより, dS を貫く電気力線の本数は, $N = E_n dS$ によって与えられる. これらすべての微小平面での電気力線の本数をまとめると, ガウスの法則は面積分を用いて

$$\boxed{\text{(ガウスの法則)} \quad \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = N}$$

によって与えられる.

(1) 領域 K : $x + y + z \leqq 10,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ (単位は [m]) に対して, K と xy 平面との交わる部分を S_1, K と yz 平面との交わる部分を S_2, K と zx 平面との交わる部分を S_3 とし, S : $x + y + z = 10,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ とおくと, K の境界 ∂K は, $\partial K = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ によって与えられる. 電界ベクトル $\boldsymbol{E} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ であるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を表す式を累次積分を用いて表せ.

(2) (1) で求めた結果とガウスの法則を用いることにより, ∂K を貫く電気力線の本数を求めよ.



209. xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ を C とし, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = (y + z)\boldsymbol{i} + (z + x)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$$

とする. このとき, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, ds$ をストークスの定理を用いて求めよ.

210. S を球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ とし, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x + y)\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (z + x)\boldsymbol{k}$$

とする. このとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ をガウスの発散定理を用いて求めよ.

4.3.2　第 6 回

211.　次の空欄を埋めよ．

(1)　i を $i^2 = \boxed{\text{ア}}$ を満たす数とする．実数 a, b を用いて

$$a + bi$$

の形で表される数を複素数といい，i を $\boxed{\text{イ}}$ という．

2 つの複素数 $a + bi, c + di$ $(a, b, c, d$ は実数$)$ について

$$a + bi = c + di \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\text{ウ}}$$

である．特に，$a + bi = 0 (= 0 + 0i)$ のとき，$a = b = 0$ である．実数 a に複素数 $a + 0i$ を対応させることにより，実数は複素数と考えることができる．また，複素数 $z = a + bi$ について，a を z の $\boxed{\text{エ}}$ といい $\mathrm{Re}(z)$ と表す．同様に，b を z の $\boxed{\text{オ}}$ といい $\mathrm{Im}(z)$ と表す．したがって，

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$$

が成り立つ．

(2)　複素数の四則演算は i を文字と思い文字式の計算をし，さらに $i^2 = -1$ を利用して計算を行う．すなわち次が成り立つ．

$$(a + bi) + (c + di) = \left(\boxed{\text{カ}}\right) + \left(\boxed{\text{キ}}\right) i$$

$$(a + bi) - (c + di) = \left(\boxed{\text{ク}}\right) + \left(\boxed{\text{ケ}}\right) i$$

$$(a + bi) \times (c + di) = \left(\boxed{\text{コ}}\right) + \left(\boxed{\text{サ}}\right) i$$

$$(a + bi) \div (c + di) = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

$$= \boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}} i$$

ここで，a, b, c, d は実数である．

$z = a + bi$ について，$\bar{z} = a - bi$ を z の $\boxed{\text{セ}}$ という．

(3)　複素数 $z = a + bi$ を座標平面の点 (a, b) に対応させることにより，複素数は平面上に数が分布していると考えられる．この平面を $\boxed{\text{ソ}}$ という．複素数 $z = a + bi$ を $\boxed{\text{ソ}}$ の点 P と考えたとき，原点 O からの距離

$$|z| = \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

を z の絶対値，半直線 OP と x 軸の正の方向とのなす角を偏角といい，$\arg(z)$ と表す．通常，偏角 θ は $-\pi < \theta \leqq \pi$ の範囲で考え，この範囲の値を主値と呼び $\mathrm{Arg}(z)$ と表すこともある．

複素数 z の絶対値を r，偏角を θ とすると，z は

$$z = r\left(\boxed{\text{チ}}\right) = \left(\boxed{\text{ツ}}\right) + \left(\boxed{\text{テ}}\right) i$$

と表すことができる．この表し方を極形式という．複素数を極形式で表すことにより，次のド・モアブルの公式を使うことができる．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \boxed{\text{ト}} + i\,\boxed{\text{ナ}} \quad (n \text{ は整数})$$

212.　次の複素数を $a + bi$ の形で書け．

(1)　$(3 - 2i) + (9 + 5i)$　(2)　$(2 + i) + (4 - 3i)$　(3)　$(3 - 2i) - (2 + i)$　(4)　$(3 + i) - (5 - 3i)$

(5)　$2(3 + 2i) + 3(4 - 2i)$　(6)　$4(2 + 5i) + 3(-2 + i)$　(7)　$2(4 + i) - 5(1 - i)$

(8)　$3(-1 + 2i) - 2(4 - 3i)$　(9)　$(5 - 2i)(3 + 2i)$　(10)　$(2 + i)(3 - i)$

(11) $(-1+2i)(2-3i)$ (12) $(-3-5i)(2+3i)$ (13) $\dfrac{3+i}{1+i}$ (14) $\dfrac{4+3i}{2-i}$

(15) $\dfrac{2+i}{3-4i}$ (16) $\dfrac{13}{2+3i}$ (17) $\dfrac{2i^5}{1+i^3}$ (18) $(2i^3-1)\left(3-\dfrac{1}{i}\right)$

213. 次の複素数の極形式を求めよ．ただし, 偏角 θ は $-\pi < \theta \leqq \pi$ の範囲とする．

(1) $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ (3) $z=1+\sqrt{3}i$ (4) $z=3+3i$

(5) $z=-3+\sqrt{3}i$ (6) $z=\sqrt{3}-i$ (7) $z=-2+2\sqrt{3}i$ (8) $z=2i$

(9) $z=-3$ (10) $z=-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

214. $z=\sqrt{3}+i$, $w=-2+2\sqrt{3}i$ のとき, 以下の問に答えよ．

(1) $\bar{z}$, zw, $\dfrac{w}{z}$ をそれぞれ $a+bi$ (a,b は実数) の形で表し, 複素平面上に図示せよ．

(2) z と w の極形式をそれぞれ

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta), \qquad w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

とおくとき, r,θ,ρ,φ をそれぞれ求めよ．ただし, $-\pi<\theta\leqq\pi$, $-\pi<\varphi\leqq\pi$ とする．

(3) $z_1=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ とするとき, z_1 を $a+bi$ の形で表せ．そして, $z_1=\bar{z}$ が成り立つことを確かめよ．

(4) $z_2=r\rho\{\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\}$ とするとき, z_2 を $a+bi$ の形で表せ．そして, $z_2=zw$ が成り立つことを確かめよ．

(5) $z_3=\dfrac{\rho}{r}\{\cos(\varphi-\theta)+i\sin(\varphi-\theta)\}$ とするとき, z_3 を $a+bi$ の形で表せ．そして, $z_2=\dfrac{w}{z}$ が成り立つことを確かめよ．

215. 次の複素数を $a+bi$ の形で表せ．

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2$ (2) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2$

(3) $\dfrac{1}{\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)^2}$ (4) $\dfrac{\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi}{\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}}$

216. 次を計算せよ．

(1) $(1+i)^6$ (2) $(1-i)^8$ (3) $(1+\sqrt{3}i)^{11}$ (4) $(1-\sqrt{3}i)^9$

217. 次の条件により定まる複素平面上の図形を図示せよ．

(1) $|z|\leqq 3$ (2) $1\leqq |z| < 4$ (3) $|z-i|<1$

(4) $\dfrac{\pi}{4}\leqq \arg(z)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ (5) $0\leqq \mathrm{Re}(z)\leqq 2$ (6) $|\mathrm{Im}(z)|>1$

4.4 正則関数と複素積分

4.4.1 第 7 回

218. 次の空欄を埋めよ．

(1) 複素数を複素数に対応させる関数を $\boxed{\text{ア}}$ という．$w=f(z)$ を $\boxed{\text{ア}}$ とする．$z=x+iy$ (x,y は実数) と表したとき, 2 変数の関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を用いて

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

と表すことができる．複素関数についても, 実数の関数, 実関数と同様に微分係数, 導関数が定義される．すなわち

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

が存在するとき, $z=a$ で微分可能といい, この値を $z=a$ における微分係数といい $f'(a)$ と表す．また, 複素数 z にその微分係数 $f'(z)$ を対応させる関数を $f(z)$ の導関数といい, $f'(z)$ または $\dfrac{df}{dz}$ などと

表す．導関数を求めることを微分するといい, 2 つの微分可能な関数 $f(z)$, $g(z)$ の和, 差, 積, 商に関する微分公式や合成関数に関する微分公式は実関数と同様に成り立つ．複素平面の領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ が D の各点で微分可能であるとする．このとき, $f(z)$ は D で $\boxed{\text{イ}}$ であるという．$f(z)$ が領域 D で $\boxed{\text{イ}}$ であるとき, $f(z)$ を正則関数という．

(2)　複素関数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (x, y は実数) が領域 D で正則ならば, コーシー・リーマンの方程式

$$u_x = \boxed{\text{ウ}}, \qquad u_y = \boxed{\text{エ}}$$

を D で満たし, D の各点 z において $f'(z)$ は

$$f'(z) = \boxed{\text{オ}} + i\boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{キ}} - i\boxed{\text{ク}}$$

で与えられる．逆に, $f(z)$ が領域 D で連続な偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y をもち, D の各点でコーシー・リーマンの方程式を満たすならば, 領域 D で $f(z)$ は正則である．

(3)　有理関数 (整式の分数の形で表される関数) は正則である．さらに, 複素関数における指数関数, 三角関数, 対数関数は以下のように定められ, 正則な関数である．ただし $z = x + iy$ (x, y は実数) とする．

$$e^z = \boxed{\text{ケ}}$$

$$\cos z = \boxed{\text{コ}}$$

$$\sin z = \boxed{\text{サ}}$$

$$\log z = \log|z| + i\arg(z) \quad (z \neq 0)$$

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \quad (z \neq 0) \qquad (\text{主値})$$

219.　$z = x + iy$ (x, y は実数) とする．次の関数 $f(z)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ を x, y の関数として表せ．

(1)　$f(z) = 2z - 3\bar{z} + 1$　(2)　$f(z) = z^2 + (\bar{z})^2$　(3)　$f(z) = z^3$　(4)　$f(z) = \dfrac{1}{z}$

(5)　$f(z) = iz + |z|^2$　(6)　$f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$　(7)　$f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}}$　(8)　$f(z) = \mathrm{Im}(z^2) + i\mathrm{Re}(z^2)$

220.　複素関数 $w = z^2$　($z = x + iy$ かつ x, y は実数) について, 以下の問に答えよ．

(1)　$w = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくとき, u, v を具体的に求めよ．

(2)　z 平面上の虚軸に平行な直線 $x = 2$ は w 平面上のどのような図形に移るか．その図形を u, v で表せ．

221.　次の複素関数 $f(z)$ を微分せよ．

(1)　$f(z) = z - 2i$　(2)　$f(z) = 2z^2 - 1$　(3)　$f(z) = z^2 - 2iz$　(4)　$f(z) = 2z^3 + z^2 - 4$

(5)　$f(z) = (iz + 1)^3$　(6)　$f(z) = \dfrac{1}{z + 2i}$　(7)　$f(z) = \dfrac{i}{z - 3}$　(8)　$f(z) = \dfrac{z}{z - i}$

(9)　$f(z) = \dfrac{z - 2i}{z + i}$　(10)　$f(z) = \dfrac{1}{(z - i)^2}$

222.　次の複素関数 $f(z)$ の $z = 1 + i$ における微分係数を求めよ．

(1)　$f(z) = z - 2i$　(2)　$f(z) = 2z^2 - 1$　(3)　$f(z) = z^2 - 2iz$　(4)　$f(z) = 2z^3 + z^2 - 4$

(5)　$f(z) = (iz + 1)^3$　(6)　$f(z) = \dfrac{1}{z + 2i}$　(7)　$f(z) = \dfrac{i}{z - 3}$　(8)　$f(z) = \dfrac{z}{z - i}$

(9)　$f(z) = \dfrac{z - 2i}{z + i}$　(10)　$f(z) = \dfrac{1}{(z - i)^2}$

223.　次の複素関数 $f(z)$ は正則関数であるか調べよ．正則である場合は, その導関数 $f'(z)$ を求めよ．

(1)　$f(z) = (3x+5y) + i(3y-5x)$　(2)　$f(z) = (2x-7y) + i(2y-7x)$
(3)　$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$　(4)　$f(z) = (x^2 + 2xy - y^2) - i(x^2 - 2xy - y^2)$
(5)　$f(z) = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy - x)$　(6)　$f(z) = (x^2 - y^2) - 2xyi$
(7)　$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$　(8)　$f(z) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + i\dfrac{x}{x^2+y^2}$　$(z \neq 0)$
(9)　$f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$　$(z \neq 0)$　(10)　$f(z) = \mathrm{Im}(z) + i\mathrm{Re}(z)$

224.　三角関数について以下の問に答えよ．

(1)　三角関数の定義にしたがって $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + i\right)$, $\cos(\pi + i)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　加法定理

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

を利用して, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + i\right)$, $\cos(\pi + i)$ の値をそれぞれ求めよ．

225.　次の複素数を $a + bi$ の形に表せ．

(1)　$e^{3+\frac{\pi}{6}i}$　(2)　$e^{\frac{\pi}{2}i}$　(3)　$e^{1-\frac{\pi}{3}i}$　(4)　$e^{2\pi i}$
(5)　$\sin(\pi + i)$　(6)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right)$　(7)　$\mathrm{Log}\, i$ (主値)
(8)　$\mathrm{Log}(1-i)$ (主値)　(9)　$\mathrm{Log}(1+\sqrt{3}i)$ (主値)　(10)　$\mathrm{Log}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$ (主値)

226.　次の関数を微分せよ．

(1)　e^{2z}　(2)　e^{iz+1}　(3)　ie^{2iz}　(4)　$\sin(z-i)$
(5)　$\cos(z+3i)$　(6)　$\sin(iz+1)$　(7)　$\cos(2iz)$
(8)　$\mathrm{Log}(z+2i)$ (主値)　(9)　$\mathrm{Log}(3z-i)$ (主値)　(10)　$\mathrm{Log}\, 2(z-i)$ (主値)

227.　三角関数の定義 $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ にしたがって,
$(\cos z)' = -\sin z$ が成り立つことを確かめよ．

4.4.2　第 8 回

228.　次の空欄を埋めよ．

$C : z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を $z(a)$ を始点, $z(b)$ を終点とする向きが付けられた複素平面内の曲線とする．複素関数 $z = F(z)$ は C を含む領域で連続とし, C は区分的に滑らかであるとすると複素積分 $\displaystyle\int_C F(z)\, dz$ は,

$$\int_C F(z)\, dz = \boxed{\text{ア}}$$

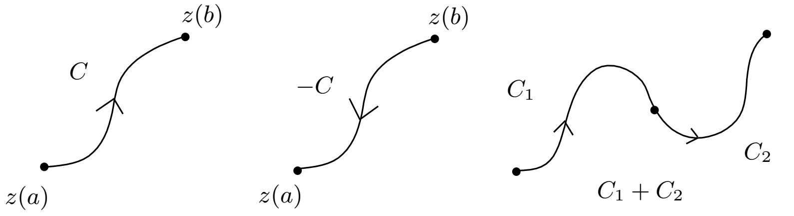
によって求めることができる．C_1, C_2 を曲線とし, C_1 の終点と C_2 の始点が一致するとき, $C_1 + C_2$ を C_1 と C_2 をつなげた曲線とすると,

$$\int_{C_1+C_2} F(z)\, dz = \boxed{\text{イ}}$$

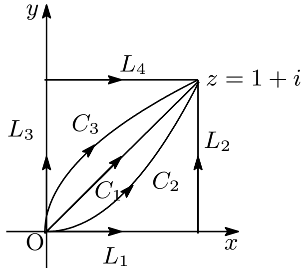
が成り立つ．また, $-C$ を曲線 C の逆向きの曲線, $-C : z = z(-t)$ $(-b \leqq t \leqq -a)$ とすると,

$$\int_{-C} F(z)\, dz = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ．



229.　原点 O を始点とし, 点 $1+i$ を終点とする 3 曲線 $C_1 : z(t) = t + it \quad (0 \leqq t \leqq 1)$, $C_2 : z(t) = t + it^2 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$, $C_3 : z(t) = t + i\sqrt{t} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$, 及び折れ線 $L_1 + L_2$, $L_3 + L_4$ に対して, 以下の複素積分を求めよ.

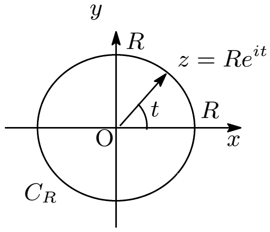


(1) $\displaystyle\int_{C_1} z\,dz$　(2) $\displaystyle\int_{C_2} z\,dz$　(3) $\displaystyle\int_{C_3} z\,dz$　(4) $\displaystyle\int_{C_1} \bar{z}\,dz$　(5) $\displaystyle\int_{C_2} \bar{z}\,dz$

(6) $\displaystyle\int_{C_3} \bar{z}\,dz$　(7) $\displaystyle\int_{C_1} z^2\,dz$　(8) $\displaystyle\int_{C_2} z^2\,dz$　(9) $\displaystyle\int_{L_1+L_2} z\,dz$　(10) $\displaystyle\int_{L_3+L_4} z\,dz$

(11) $\displaystyle\int_{L_1+L_2} \bar{z}\,dz$　(12) $\displaystyle\int_{L_3+L_4} \bar{z}\,dz$

230.　中心が原点で半径が R の円周を C_R, $C_R : z(t) = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とし, 向きは正の向きにとる. このとき, 以下の複素積分を求めよ.



(1) $\displaystyle\int_{C_R} \frac{1}{z}\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_{C_R} \frac{1}{z^2}\,dz$

4.5　コーシーの積分定理, 正則関数の展開, 留数定理

4.5.1　第 9 回

231.　次の空欄を埋めよ.

複素積分を計算する際には, 次の 3 つの定理は非常に有用である. 複素関数 $w = f(z)$ が閉曲線 C の周とその内部を含む領域で正則のとき,

$$\int_C f(z)\,dz = \boxed{\text{ア}}$$

である. これをコーシーの定理という. また, a が C の内部の点のとき,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ. これをコーシーの積分表示という. $n = 2, 3, \ldots$ のときは,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz = \boxed{\text{ウ}}\, f^{(n-1)}(a)$$

が成り立つ. これをグルサーの定理という. ここで, $f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ の第 n 次導関数を表す.

232.　C を原点中心, 半径 2 の円周 $|z| = 2$ (正の向き) とするとき, 以下の積分を考える.

$$I_1 = \int_C \frac{z^3}{z-i}\,dz \qquad I_2 = \int_C \frac{3z^2+z+2}{(z-i)^3}\,dz$$

$$I_3 = \int_C \frac{z^2}{z+3}\,dz \qquad I_4 = \int_C \frac{z}{(z+1)(z-5)}\,dz$$

(1)　I_1 から I_4 までの各積分は, (ア) コーシーの定理, (イ) コーシーの積分表示, (ウ) グルサーの定理のうち, どの定理を用いて求めることがもっとも適当か. それぞれ (ア)〜(ウ) の記号を答えよ.
(2)　I_1 から I_4 の各積分を求めよ.

233.　C を原点を中心とする半径 3 の円とする. 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C (z^2+iz+1)\,dz$ (2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z+5}\,dz$ (3) $\displaystyle\int_C \frac{z^2-3}{z+i}\,dz$ (4) $\displaystyle\int_C \frac{(z+i)^2}{z-2}\,dz$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+iz}{z+2i}\,dz$ (6) $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{z-1}\,dz$ (7) $\displaystyle\int_C \frac{3z}{z-4i}\,dz$ (8) $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{z+6}\,dz$

(9) $\displaystyle\int_C \frac{z^2-6z}{(z-2)(z+4)}\,dz$ (10) $\displaystyle\int_C \frac{z^3-3z^2+1}{(z-1)(z+5)}\,dz$ (11) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^3}\,dz$

(12) $\displaystyle\int_C \frac{2z^2-3z}{(z-1)^2}\,dz$ (13) $\displaystyle\int_C \frac{3+4i}{(z+4i)(z+2)^2}\,dz$ (14) $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z+i)(z-i)}\,dz$

4.5.2　第 10 回

234.　次の空欄を埋めよ.

複素関数 $w = f(z)$ が $z = a$ で正則のとき, 何回でも微分可能なので, 実関数の場合と同様に a の近くの点 z に対して次のように a を中心としてテーラー展開できる.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\text{ア}} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \boxed{\text{ア}} + \cdots$$

特に, $a = 0$ のとき, マクローリン展開という. これらの関数の展開については実関数の場合と同様の性質をもつ. $f(z)$ が $z = a$ で正則でないとき, a を $f(z)$ の特異点という. 特に, $f(z)$ が a の近くの $z = a$ 以外のすべての点で正則のとき, a を孤立特異点という. a が $f(z)$ の孤立特異点のとき, a の近くの $z = a$ 以外の点に対して,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n = \cdots + b_{-2}(z-a)^{-2} + b_{-1}(z-a)^{-1} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (n \text{ は整数})$$

(C は a を中心とする円周) と展開できる. これを a を中心とする $\boxed{\text{イ}}$ という. さらに, $\boxed{\text{ウ}}$ を $f(z)$ の $z = a$ における留数といい, $\mathrm{Res}[f, a]$ または $\mathrm{Res}(a)$ などと表される.

a を関数 $f(z)$ の孤立特異点とする. $f(z)$ の $z = a$ を中心とする $\boxed{\text{イ}}$ が

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n(z-a)^n = b_{-k}(z-a)^{-k} + \cdots + b_{-1}(z-a)^{-1} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

と表されるとき, a を k 位の極という. $z = a$ が 1 位の極のとき,

$$\mathrm{Res}(a) = \lim_{z\to a}\left[\ \boxed{\text{エ}}\ \right]$$

$z = a$ が k 位の極のとき $(k = 2, 3, \ldots)$,

$$\mathrm{Res}(a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\boxed{\text{オ}}$$

が成り立ち, 留数を簡単に求めることができる.

関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部の有限個の点 $a_1, \ldots, a_m$ を除いて, C の周とその内部を含む領域で $f(z)$ が正則ならば,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\{\mathrm{Res}(a_1) + \cdots + \mathrm{Res}(a_m)\}$$

が成り立つ. これを $\boxed{\text{カ}}$ といい, $\boxed{\text{カ}}$ により, 複素積分は簡単に求めることができる.

235.　次の複素関数のマクローリン展開を記せ.

(1)　e^z　　(2)　$\sin z$　　(3)　$\cos z$　　(4)　$\dfrac{1}{1-z}$

(5)　$\mathrm{Log}(1+z)$　　(6)　$\cos 3z$　　(7)　$\dfrac{1}{1-2z}$　　(8)　$\mathrm{Log}(e+z)$

236.　次の関数の (　) 内の特異点を中心とするローラン展開を求めよ.

(1)　$\dfrac{\sin z}{z}$　$(z=0)$　　(2)　$\dfrac{z-\sin z}{z^3}$　$(z=0)$　　(3)　$\dfrac{e^{2z}-1}{z}$　$(z=0)$

(4)　$\dfrac{e^z}{(z+1)^2}$　$(z=-1)$　　(5)　$\dfrac{1}{z^2(1-z)}$　$(z=0)$　　(6)　$z^3 e^{\frac{1}{z}}$　$(z=0)$

(7)　$\dfrac{\cos z}{z^2}$　$(z=0)$　　(8)　$\dfrac{\mathrm{Log}(1+2z)}{z^2}$　$(z=0)$

237.　次の関数 $f(z)$ の (　) 内の特異点における留数を求めよ.

(1)　$f(z) = \dfrac{z^2}{z-3i}$　$(z=3i)$　　(2)　$f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-2)}$　$(z=2)$

(3)　$f(z) = \dfrac{z+i}{(z-2i)(z+1)}$　$(z=2i)$　　(4)　$f(z) = \dfrac{(z+2i)^3}{(z-i)(z+i)}$　$(z=i)$

(5)　$f(z) = \dfrac{iz}{z^2+4}$　$(z=2i)$　　(6)　$f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+2}$　$(z=1+i)$

(7)　$f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-i)}$　$(z=0)$　　(8)　$f(z) = \dfrac{3z^2}{(z-1)^2}$　$(z=1)$

(9)　$f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$　$(z=0)$　　(10)　$f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^4}$　$(z=0)$

238.　留数定理により, 次の積分を求めよ.

(1)　$I = \displaystyle\int_C \frac{2+iz}{z^2+1}\,dz$　$(C:\ |z|=2)$　　(2)　$I = \displaystyle\int_C \frac{2z}{z^2+9}\,dz$　$(C:\ |z|=4)$

(3)　$I = \displaystyle\int_C \frac{z^3}{z^2-4}\,dz$　$(C:\ |z|=3)$　　(4)　$I = \displaystyle\int_C \frac{z+2}{(z+1)(z-4)}\,dz$　$(C:\ |z|=3)$

(5)　$I = \displaystyle\int_C \frac{z+1}{z^2(z-i)}\,dz$　$(C:\ |z|=3)$　　(6)　$I = \displaystyle\int_C \frac{1}{z^3(z-1)^2}\,dz$　$(C:\ |z|=3)$

4.6　微分方程式とその解, 1 階の微分方程式

4.6.1　第 11 回

239.　次の空欄を埋めよ.

(1)　変数 x, 関数 $y=y(x)$ および y の導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots$ からなる等式を微分方程式という. x, y, y' からなる微分方程式を $\boxed{\text{ア}}$ 微分方程式, x, y, y', y'' からなる微分方程式を $\boxed{\text{イ}}$ 微分方程式, 同様に $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ からなる微分方程式を $\boxed{\text{ウ}}$ 微分方程式という. $\boxed{\text{ウ}}$ 微分方程式

$$y^{(n)} = (x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)} \text{ に関する式})$$

が与えられたとき, この等式を満足する関数 $y = f(x)$ を微分方程式の解という. 微分方程式の解には次のものがある. n 個の任意定数を含む解を $\boxed{\text{エ}}$ という. また, $x = a$ を与えたとき, $\boxed{\text{ウ}}$ 微分方程式が条件

$$y(a) = b_0,\ y'(a) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

を満たすとする. この条件を $\boxed{\text{オ}}$ といい, $\boxed{\text{オ}}$ を与えたとき $\boxed{\text{エ}}$ の n 個の定数の値が具体的に定まった解を $\boxed{\text{カ}}$ という.

(2)

$$\frac{dy}{dx}(= y') = \frac{f(x)}{g(y)}$$

の形で表される微分方程式を $\boxed{\text{キ}}$ 微分方程式という. この形の微分方程式は次のように一般解を求めることができる. 形式的に

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

と変形し, 両辺を積分して一般解

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る.

240.　1 階の微分方程式 $y' + \dfrac{y}{x} = 0 \quad \cdots$(i) について, 以下の問に答えよ.

(1)　$y = \dfrac{c}{x}$ (c は任意定数) はこの微分方程式の一般解を与えることを示せ.

(2)　(i) の解で, $x = 4$ のとき $y = \dfrac{5}{3}$ となるものを求めよ.

241.　1 階の微分方程式 $y' + 2\dfrac{y}{x} = 0 \quad \cdots$(i) の一般解は $y = \dfrac{c}{x^2}$ (c は任意定数) である. 以下の初期条件のもとで, 微分方程式 (i) の特殊解を求めよ.

(1)　$x = 1$ のとき $y = 1$　(2)　$x = 2$ のとき $y = -2$　(3)　$x = -1$ のとき $y = 3$
(4)　$x = 3$ のとき $y = -3$　(5)　$x = -2$ のとき $y = 5$　(6)　$x = 1$ のとき $y = -4$

242.　2 階の線形微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \quad \cdots \text{(i)}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1)　$y_0 = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}$ はこの微分方程式の特殊解であることを示せ.

(2)　2 階の同次線形微分方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \cdots \text{(ii)}$$

について, $u = c_1e^x + c_2e^{2x}$ (c_1, c_2 は任意定数) はこの微分方程式の一般解を与えることを示せ.

(3)　(1), (2) で現れた解に対して, $y = u + y_0$ とおくと, y は (i) の一般解を与えることを示せ.

243.　次の曲線群が解曲線群を与えるような微分方程式を求めよ. ただし, c, c_1, c_2 は任意定数とする.

(1)　$y = cx$　(2)　$y = cx^2$　(3)　$y = \dfrac{c}{x^3}$　(4)　$y = ce^{2x}$
(5)　$y = e^{cx}$　(6)　$y = ce^x \sin x$　(7)　$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$
(8)　$y = c_1x + c_2$　(9)　$y = c_1x^2 + c_2x$　(10)　$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$

244.　次の変数分離形の微分方程式を解け.

(1)　$yy' + x = 0$　(2)　$x^2\dfrac{dy}{dx} = y$　(3)　$y' = \dfrac{1}{2}x$　(4)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y^2}$
(5)　$y' = \sin x$　(6)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy}$　(7)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$　(8)　$y' - \dfrac{y^3}{\sqrt{x}} = 0$
(9)　$y' \cos x + y^2 \sin x = 0$　(10)　$y' \log y + x = 0$

4.6.2　第 12 回

245.　次の空欄を埋めよ．

(1)　$t = \dfrac{y}{x}$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}(= y') = f(t) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

と表される微分方程式を $\boxed{\text{ア}}$ 微分方程式という．この微分方程式は, $y = xt$ と $\dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx}$ を用いることにより, x と t に関する変数分離型微分方程式に変形でき, 一般解を求めることができる．

(2)　関数 $P(x)$, $Q(x)$ を用いて,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

で表される微分方程式を $\boxed{\text{イ}}$ 微分方程式という．この微分方程式は公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\right)$$

(c は任意定数) を用いて一般解を求めることができる．

(3)　関数 $P(x)$, $Q(x)$ を用いて,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$(n = 2, 3, \ldots,)$ で表される微分方程式を $\boxed{\text{ウ}}$ 微分方程式という．この微分方程式は $z = y^{1-n}$ と置き換えると (2) の微分方程式と同じ形になり, 一般解を求めることができる．

246.　次の微分方程式は同次形, 1 階線形, ベルヌーイ形の内, どの形の微分方程式となるか答えよ．

(1)　$x\dfrac{dy}{dx} = x^3y^3 - y$　　(2)　$xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$　　(3)　$x\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - y$

(4)　$x\dfrac{dy}{dx} = x^3 - y$　　(5)　$x^2\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$　　(6)　$x^2\dfrac{dy}{dx} = xy + xy^3$

247.　微分方程式 $xy' = x + 2y \quad \cdots$ (i) について, 以下の問に答えよ．

(1)　1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\right)$$

(c は任意定数) で与えられることを用いて (i) の一般解を求めよ．

(2)　同次形の微分方程式として解け．

248.　次の微分方程式を解け．

(1)　$y' - y = e^x$　　(2)　$y' + 2y = e^{-2x}\sin x$　　(3)　$y' - y = e^x \log x$

(4)　$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}$　　(5)　$y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}$　　(6)　$y' + 2xy = e^{-x^2}$

249.　次の同次形の微分方程式を解け．

(1)　$x^2\dfrac{dy}{dx} = xy + y^2$　　(2)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{xy - y^2}$　　(3)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

4.7　2 階定数係数線形同次微分方程式の一般解

4.7.1　第 13 回

250.　次の空欄を埋めよ．

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を定数とする．微分方程式

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

を n 階 $\boxed{\text{ア}}$ 微分方程式という．この微分方程式は, 補助方程式

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n = 0$$

を解くことにより一般解を得ることができる．

実際, $n = 1$ のとき, 補助方程式の解を $t = a$ とすると, 一般解は

$$y = \boxed{\text{イ}} \quad (c \text{ は定数})$$

である．同様に, $n = 2$ のときは補助方程式が 2 次方程式になるので, 次の 3 つの場合に分かれる．まず, 異なる実数解 α, β をもつときは,

$$y = \boxed{\text{ウ}} \quad (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

が一般解である．重解 α をもつときは,

$$y = \boxed{\text{エ}} \quad (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

が一般解である．虚数解 $\lambda \pm \mu i$ をもつときは

$$y = \boxed{\text{オ}} \quad (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

が一般解である．

251.　次の微分方程式の補助方程式を求めよ．

(1)　$y'' = 0$　(2)　$y' + 3y = 0$　(3)　$y' - 2y = 0$
(4)　$y' + 5y = 0$　(5)　$y' - 7y = 0$　(6)　$y'' - 4y' + 4y = 0$
(7)　$y'' + 6y' + 9y = 0$　(8)　$y'' - 5y' + 6y = 0$　(9)　$y'' - 2y' - 8y = 0$
(10)　$y'' - 2y' - 15y = 0$　(11)　$y'' + 7y' + 12y = 0$　(12)　$y'' - 9y' + 14y = 0$
(13)　$y'' - 10y' + 16y = 0$　(14)　$y'' - 4y = 0$　(15)　$y'' - 25y = 0$

252.　次の微分方程式を解け．

(1)　$y'' = 0$　(2)　$y' + 3y = 0$　(3)　$y' - 2y = 0$
(4)　$y' + 5y = 0$　(5)　$y' - 7y = 0$　(6)　$y'' - 4y' + 4y = 0$
(7)　$y'' + 6y' + 9y = 0$　(8)　$y'' - 5y' + 6y = 0$　(9)　$y'' - 2y' - 8y = 0$
(10)　$y'' - 2y' - 15y = 0$　(11)　$y'' + 7y' + 12y = 0$　(12)　$y'' - 9y' + 14y = 0$
(13)　$y'' - 10y' + 16y = 0$　(14)　$y'' - 4y = 0$　(15)　$y'' - 25y = 0$

4.7.2　第 14 回

253.　次の微分方程式を解け．

(1)　$y'' + 9y' + 20y = 0$　(2)　$y'' + 11y' + 18y = 0$　(3)　$y'' + 13y' + 36y = 0$
(4)　$y'' + 14y' + 45y = 0$　(5)　$y'' + 2y' = 0$　(6)　$y'' - 3y' = 0$
(7)　$y'' - 14y' + 49y = 0$　(8)　$y'' - y' - 30y = 0$　(9)　$y'' + 2y' - 48y = 0$
(10)　$y'' - 2y' - 35y = 0$　(11)　$y'' - 2y' + 10y = 0$　(12)　$y'' + 4y' + 5y = 0$
(13)　$y'' - 6y' + 10y = 0$　(14)　$y'' + 16y = 0$　(15)　$y'' + 25y = 0$